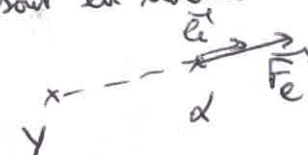


1) Du point de vue classique : $E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\geq 0} + E_p$

Donc la particule α ne peut exister que dans les régions où $E_m \geq E_p$
 soit ici les régions 1 et 3 sont accessibles, la région 2 est interdite.
 Du point de vue quantique, la particule α peut traverser la région 2
 par effet tunnel.

2) Dans le puits de potentiel, la particule α est très près du noyau fils,
 ils ne forment qu'un seul noyau : le noyau père. Ils sont liés par la
 force nucléaire très attractive à toute distance : $F_n = - \underbrace{\frac{dE_p}{dr}}_{>0} (r=r_1) < 0$.

Dans la région 3, la particule α est loin du noyau fils, la réaction
 nucléaire a eu lieu : ses noyaux sont chargés positivement tous les deux
 (charge $+2e$ pour α et charge $(Z-2)e$ pour Y), ils sont en interaction électrostatique,
 cette force est répulsive : $F_e = \frac{2e \times (Z-2)e}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_1$



3) Région 1 : $V = -V_1$ et $\phi = \phi_1$ soit $\phi_1'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E_\alpha + V_1)}_{>0} \phi_1 = 0$

on reconnaît un oscillateur harmonique de
 pulsation spatiale $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_\alpha + V_1)}$ d'où les solutions en exponentielle complexe.

Région 3 : $V = 0$ et $\phi = \phi_3$ soit $\phi_3'' + \underbrace{\frac{2mE_\alpha}{\hbar^2}}_{>0} \phi_3 = 0$

c'est aussi un oscillateur harmonique
 de pulsation $k_3 = \sqrt{\frac{2mE_\alpha}{\hbar^2}}$

Région 2 : $V = V_2$ et $\phi = \phi_2$ soit $\phi_2'' - \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E_\alpha)}_{>0} \phi_2 = 0$

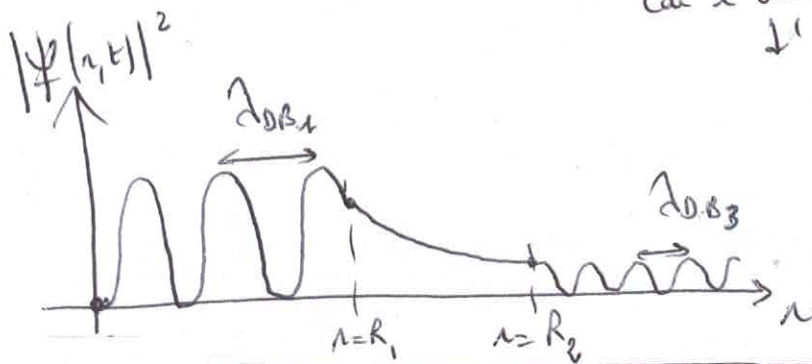
Ce n'est pas un oscillateur harmonique
 d'où les solutions en exponentielle réelle avec $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_2 - E_\alpha)}{\hbar^2}}$

4) On a $\psi_1(r,t) = \underbrace{Ae^{j(k_1 r - \frac{E_1 t}{\hbar})}}_{\text{onde incidente dans le puits } \text{OPPH}^+} + \underbrace{Be^{-j(k_1 r + \frac{E_1 t}{\hbar})}}_{\text{onde réfléchie dans le puits } \text{OPPH}^-}$

$$\psi_2(r,t) = \underbrace{Ce^{k_2 r} e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + De^{-k_2 r} e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}}}_{\text{O.S. amorties}}$$

$$\psi_3(r,t) = \underbrace{Fe^{j(k_3 r - \frac{E_1 t}{\hbar})}}_{\text{onde transmise } \text{OPPH}^+} + \underbrace{Ge^{-j(k_3 r + \frac{E_1 t}{\hbar})}}_{\text{OPPH}^-}$$

cette onde n'existe pas
car l'onde incidente vient du puits
↓ on a $G=0$



5) On écrit la continuité de $\phi(r)$ et de $\phi'(r)$ (car le potentiel ne diverge pas) en $r=R_1$ et $r=R_2$:

$$\phi_1(R_1) = \phi_2(R_1) \Rightarrow Ae^{jk_1 R_1} + Be^{-jk_1 R_1} = Ce^{k_2 R_1} + De^{-k_2 R_1}$$

$$\phi_2(R_2) = \phi_3(R_2) \Rightarrow Ce^{k_2 R_2} + De^{-k_2 R_2} = Fe^{jk_3 R_2}$$

$$\phi'_1(R_1) = \phi'_2(R_1) \Rightarrow jk_1 (Ae^{jk_1 R_1} - Be^{-jk_1 R_1}) = k_2 (Ce^{k_2 R_1} - De^{-k_2 R_1})$$

$$\phi'_2(R_2) = \phi'_3(R_2) \Rightarrow k_2 (Ce^{k_2 R_2} - De^{-k_2 R_2}) = jk_3 Fe^{jk_3 R_2}$$

6) On a : $\vec{J}_1 = \underbrace{\frac{\hbar}{m_x} k_1 |A|^2 \vec{e}_1}_{\text{onde incidente } \text{OPPH}^+} - \underbrace{\frac{\hbar}{m_x} k_1 |B|^2 \vec{e}_1}_{\text{onde réfléchie } \text{OPPH}^-}$

le vecteur $\vec{J}$ est dans
le sens de déplacement de
la particule et de l'onde
qui lui est associée

Le coefficient de transmission de la barrière s'écrit:

$$D = \frac{\|\vec{J}_3\|}{\|\vec{J}_1\|} = \frac{\frac{\hbar}{m_x} k_3 |F|^2}{\frac{\hbar}{m_x} k_1 |A|^2} = \frac{k_3}{k_1} \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

1) $|\Psi(u, t)|^2$ représente la densité de probabilité de présence de l'électron à l'instant t en u . Cette densité est égale à $|\phi(u)|^2$ qui ne dépend pas du temps, cela est caractéristique d'un état stationnaire (pour lequel Ψ dépend du temps mais la probabilité de présence u en dépend pas).

2) L'électron se trouve obligatoirement entre $u=0$ et $u=l_n$ donc la probabilité de le trouver entre $u=0$ et $u=l_n$ vaut 1, ce qui s'écrit :

$$\int_0^{l_n} |\Psi(u, t)|^2 du = \int_0^{l_n} |\phi(u)|^2 du = 1$$

La fonction $\phi(u)$ est continue en tout point soit :

$$\phi(u=0^-) = \phi(u=0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(u=l_n^-) = \phi(u=l_n^+) = 0$$

0 car

l'électron ne peut pas se trouver là où le potentiel est ∞

La fonction $\phi'(u)$ n'est pas continue en $u=0$ et $u=l_n$ car le potentiel diverge en ces points.

3) Dans le puits infini, l'électron effectue des allers-retours, l'électron est donc représenté par une superposition d'ondes $+ \phi$ et $-\phi$ dont la résultante peut être une onde stationnaire pour certaines énergies. Cette onde stationnaire présente des nœuds de probabilité à ces extrémités. Le système est analogue à la corde de Helmholtz.

4) On a : $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = E \Psi$

avec $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \phi''(u) e^{-i \frac{E_y t}{\hbar}}$

avec $V=0$ dans le puits et $E=E_n$

d'où $-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(u) e^{-i \frac{E t}{\hbar}} = E_n \phi(u) e^{-i \frac{E t}{\hbar}}$

soit $\boxed{\phi''(u) + \frac{2m E_n}{\hbar^2} \phi(u) = 0}$

on reconnaît une oscillation harmonique de pulsation spatiale $\boxed{k_x = \sqrt{\frac{2m E_n}{\hbar^2}}}$

5) Solution : $\phi(x) = A \cos(k_n x) + B \sin(k_n x)$

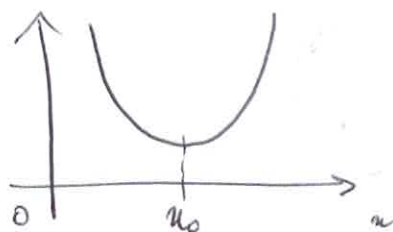
avec $\phi(x=0) = 0 = A$

$\phi(x=l_n) = 0 = B \sin(k_n l_n)$ d'où $k_n l_n = n\pi$

soit $k_n = \frac{n\pi}{l_n} = \sqrt{\frac{2m E_n}{\hbar^2}}$ et $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m l_n^2}$

6) Par analogie : $k_y = \frac{n\pi}{l_y}$ et $E_y = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m l_y^2}$

7) $V_{\text{eff}}(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} (x-x_0)^2$ est l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de position d'équilibre stable x_0 , de pulsation propre ω_0 et de masse m . On a :



8) On doit avoir : $0 \leq x_0 \leq l_n$

soit $0 \leq \frac{\hbar k_y}{eB} \leq l_n$ et

$k_y \leq \frac{eB l_n}{\hbar}$

valeur maximale de k_y

9) On $k_y = \frac{n_y \pi}{l_y}$ donc $\frac{n_y \pi}{l_y} \leq \frac{eB l_n}{\hbar}$

soit $n_y \leq \frac{eB l_n l_y}{\pi \hbar} = \frac{eB l_n l_y}{h}$

Il y a au maximum $\frac{eB l_n l_y}{h}$ niveaux d'énergie et sur chaque niveau d'énergie, on peut placer 2 électrons de spins opposés donc il y a $2 \frac{eB l_n l_y}{h}$ états possibles