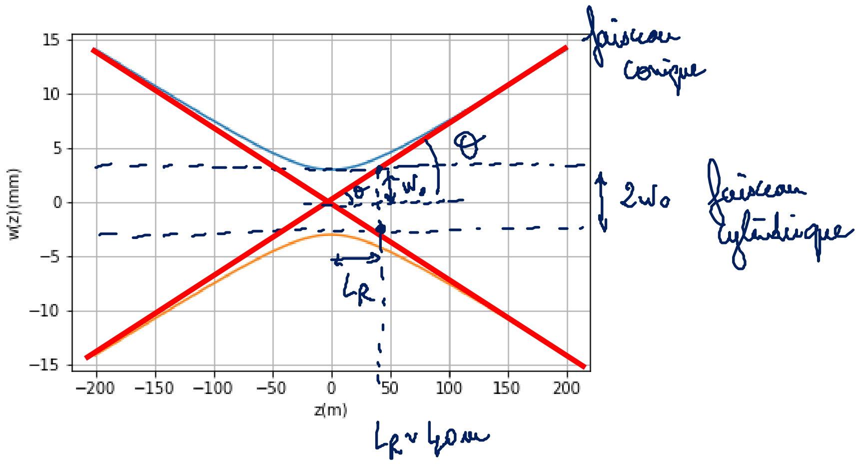
I. **Le faisceau laser**

Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 650\ nm$ est de révolution autour de l'axe Oz, la propagation se faisant selon Oz croissant. La puissance lumineuse du faisceau est $P = 10\ mW$.

La figure ci contre représente la coupe longitudinale du faisceau laser. L'échelle en abscisse est en millimètre et en ordonnée en mètre.



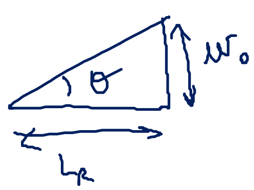
1. Lire sur le graphe la valeur du rayon minimal w_0 du faisceau, quel nom porte-t-il? En déduire l'intensité moyenne sur la section minimale du faisceau.

$w_0 \simeq 3\ mm$

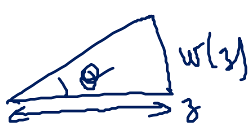
$$I = I_{moy} = \frac{P}{\pi w_0^2} = \frac{10.10^{-3}}{\pi \times (3.10^{-3})^2} \text{ en } W\,m^{-3}$$

2. Déterminer graphiquement la longueur de Rayleigh.

3. Définir l'ouverture angulaire θ du faisceau. Calculer θ et prévoir la valeur numérique du rayon du faisceau pour $z = 300\ m$.

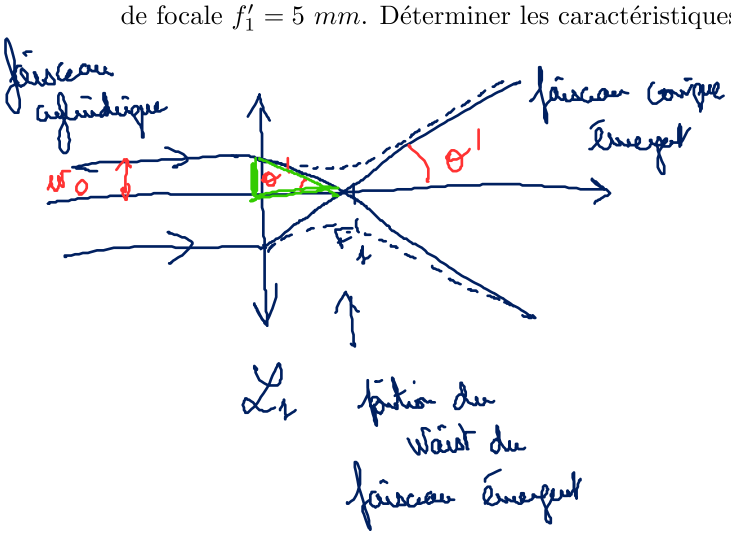


$$\theta = \frac{w_0}{L_R} = \frac{3.10^{-3}}{40} = 0{,}75.10^{-4} = 7{,}5.10^{-5}\ rad$$

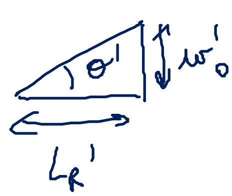


$$\theta = \frac{w(z)}{z} \Rightarrow w(z) = \theta z$$

4. Le faisceau laser est dans sa zone de Fresnel (zone cylindrique) et traverse une lentille convergente L_1 de focale $f_1' = 5\ mm$. Déterminer les caractéristiques du faisceau émergent de la lentille.



$$\theta' = \frac{w_0}{f_1'} = \frac{3.\cancel{10^{-3}}}{5.\cancel{10^{-3}}} = 0{,}6\ rad$$



$$\theta' = \frac{w_0'}{L_R'} \Rightarrow L_R' = \frac{w_0'}{\theta'}$$

diffraction : $\theta' = \dfrac{\lambda}{w_0'} \Rightarrow w_0' = \dfrac{\lambda}{\theta'}$

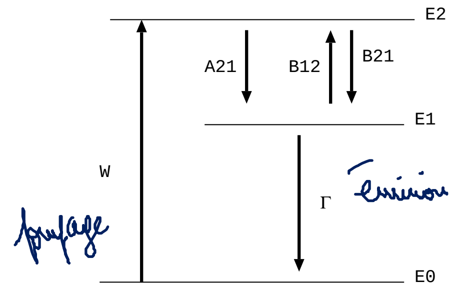
II. Laser à 3 niveaux d'énergie

Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 3 niveaux est donné ci-contre. On note $u(\nu)$ la densité énergétique donnée par la loi de Planck (en $J.m^{-3}.Hz^{-1}$).

On note N_1, N_2 et N_0 les nombres d'atomes dans les niveaux d'énergie E_1, E_2, E_0.

Les coefficients A_{21}, B_{21} et B_{12} sont les coefficients d'Einstein respectivement pour l'émission spontanée, l'émission stimulée et l'absorption. On a $B_{12} = B_{21} = B$.

Les coefficients W et Γ sont en s^{-1}.



1. On donne $\frac{dN_1}{dt} = \pm\Gamma N_a \pm A_{21}N_b \pm B_{21}u(\nu)N_c \pm B_{21}u(\nu)N_d$. Préciser le signe qu'il faut garder et exprimer N_a, N_b, N_c et N_d en fonction de N_1 ou N_2.

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Gamma N_1 + A_{21} N_2 - B_{21} u(\nu) N_1 + B_{21} u(\nu) N_2$$

$N_1 \downarrow$ par émission vers E_0

émission de E_2 vers E_1

absorption de E_1 vers E_2

émission stimulée de E_2 vers E_1

2. Ecrire $\frac{dN_2}{dt}$. Pourquoi n'est ce pas nécessaire d'écrire $\frac{dN_0}{dt}$?

atomes $.s^{-1}$

en s^{-1}

$$\frac{dN_2}{dt} = +\Gamma \times N_0 - A_{21} N_2 + B_{21} u(\nu) N_1 - B_{21} u(\nu) N_2$$

pompage de E_0 vers E_2

il se produit les mêmes phénomènes que pour les atomes de E_1 mais avec les signes opposés

On pose $\Delta N = N_2 - N_1$ et $N_1 + N_2 + N_0 = N$.

3. En régime stationnaire, on trouve $\Delta N = \frac{W - A_{21}}{W + A_{21} + 2Bu(\nu_0)}(N - N_0)$. La transition laser concerne les états d'énergie E_1 et E_2. En déduire une condition pour l'inversion de population.

$$\Delta N = N_2 - N_1 > 0$$

$$\underbrace{\Delta N}_{>0} = \frac{W - A_{21}}{W + A_{21} + 2Bu(\nu_0)} \overbrace{(N - N_0)}^{>0} \Rightarrow \boxed{W > A_{21}}$$

inversion de population

pompage important

III. **Onde dans un plasma**

$\overset{+e}{\times}$ M $\qquad \overset{-e}{\times}$ $m \ll M$

Un plasma est constitué d'ions positifs de charge $+e$, de masse M et d'électrons de charge $-e$, de masse $m << M$. Les densités volumiques des ions et des électrons sont égales. On la note n. Les ions sont supposés immobiles et les électrons possèdent une vitesse $\vec{v}$. L'ensemble est plongé dans un champ électrique qui s'écrit en cartésiennes : $\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \vec{e_y}$ en représentation complexe.

1. Justifier l'immobilité des ions. les ions sont très lourds

2. Justifier le fait que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique.

$\hat{\vec{F}}_m = -e\hat{\vec{v}} \wedge \hat{\vec{B}} \qquad \hat{\vec{F}}_e = -e\hat{\vec{E}}$

v : vitesse d'un e^- $\qquad$ c : vitesse de l'onde

$$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\cancel{e} v B}{\cancel{e} E} = v \times \frac{B}{E} \simeq \frac{v}{c} \ll 1$$

e^- non relativiste

dans le vide : $Bc = E$: on la suppose vraie dans le plasma

3. Etablir la relation entre la représentation complexe de la vitesse $\underline{\vec{v}}$, $\underline{\vec{E}}$ et les données de l'exercice en supposant que les électrons subissent la force d'interaction avec les autres électrons et les noyaux $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. En déduire l'expression (en notation complexe) de la densité volumique de courant $\underline{\vec{j_e}}$ et l'expression de la conductivité thermique $\underline{\gamma}$.

$\hat{\underline{\vec{E}}} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{\vec{e}}_y \qquad \underline{\hat{\vec{v}}} = \vec{v}_0 e^{i(kx-\omega t)}$

RFD appliquée à un e^- :

$$m\frac{d\hat{\vec{v}}}{dt} = \cancel{m\vec{g}} \cancel{- e\hat{\vec{v}} \wedge \hat{\vec{B}}} - e\underline{\hat{\vec{E}}} - \frac{m}{\tau}\underline{\hat{\vec{v}}}$$

$$\left(-i\omega m + \frac{m}{\tau}\right)\underline{\hat{\vec{v}}} = -e\underline{\hat{\vec{E}}} \rightarrow \boxed{\underline{\hat{\vec{v}}} = \frac{-\frac{e\tau}{m}}{1 - i\omega\tau}\underline{\hat{\vec{E}}}}$$

$$\hat{\vec{j}}_e = -en\underline{\hat{\vec{v}}} = \underbrace{\frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 - i\omega\tau}}_{\underline{\gamma}}\hat{\vec{E}}$$

$\hat{\vec{j}}_e = \underline{\gamma}\underline{\hat{\vec{E}}}$: loi d'Ohm locale

4. Que devient cette conductivité lorsque l'on néglige les interactions entre les particules? On se place dans cette hypothèse dans la suite.

$\vec{f} \simeq \vec{0} \Rightarrow \tau \rightarrow \infty$

τ : temps moyen entre 2 interactions

$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2\cancel{\tau}}{m(-i\omega\cancel{\tau})} = -\frac{ne^2}{mi\omega}$$

5. Etablir l'équation de propagation du champ électrique. $\rho = 0$ électroneutralité

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\hat{\vec{E}}) = \vec{grad}(\cancel{\mathrm{div}\,\hat{\vec{E}}}) - \Delta\hat{\vec{E}}$$

$$\vec{rot}\left(-\frac{\partial\hat{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\,\hat{\vec{B}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0\underline{\gamma}\hat{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\hat{\vec{E}}}{\partial t}\right] = -\Delta\hat{\vec{E}}$$

$$\Delta\underline{\hat{\vec{E}}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\hat{\vec{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\hat{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0}$$

éq. de d'Alembert ajoutée du terme $-\mu_0\gamma\frac{\partial\hat{\vec{E}}}{\partial t}$

6. Établir l'expression de $\underline{k}^2$. A quelle condition a-t-on propagation ? Dans le cas où il y a propagation exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Conclure.

$$\hat{\vec{E}} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{\vec{e}}_y : \quad -k^2\underline{\hat{\vec{E}}} - \mu_0\varepsilon_0(-\omega^2)\underline{\hat{\vec{E}}} - \mu_0\underline{\gamma}(-i\omega)\underline{\hat{\vec{E}}} = \vec{0}$$

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 + \mu_0\underline{\gamma}i\omega = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0\left(-\frac{ne^2}{m\cancel{i\omega}}\right)\cancel{i\omega} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m}}$$

propagation : k soit réel $\Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\omega > \omega_p}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

dispersion

IV. **Onde dans un métal**

Une onde harmonique progressive de fréquence $f = 1\ MHz$, d'amplitude E_0, polarisée rectilignement selon Oy, se propage selon Ox, dans le sens des x croissants, dans le demi espace $x > 0$ occupé par un matériau conducteur de conductivité $\gamma = 10^7\ s.m^{-1}$, de permittivité diélectrique $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$ et de perméabilité $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ H.m^{-1}$.

1. Proposer une expression de $\overrightarrow{\underline{E}}$ en notation complexe.

2. Déterminer l'équation de propagation puis la relation de dispersion et en déduire l'expression de $\underline{n}^2$, où $\underline{n}$ est l'indice du milieu.

3. Simplifier l'expression de $\underline{n}^2$ compte tenu de la valeur de la fréquence, et en déduire l'expression de $\underline{n}$.

4. En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde et conclure.

5. Donner alors l'expression réelle de $\overrightarrow{E}$ et interpréter.