Etude d'une particule libre

Soit une particule libre de masse m, de vitesse v, d'énergie E et d'énergie potentielle nulle. Cette particule se déplace sur l'axe Ox. On note $k = \dfrac{2\pi}{\lambda_{DB}}$, le vecteur d'onde associé à la particule.
Exprimer sa quantité de mouvement en fonction de $\hbar$ et k.

Exprimer son énergie E en fonction de $\hbar$, m et k.

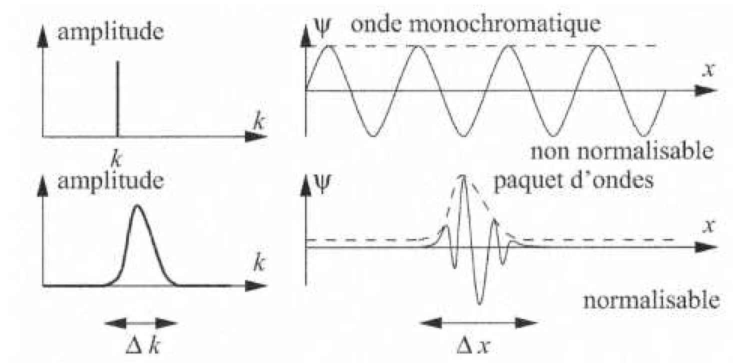
On cherche la fonction d'onde sous la forme d'une OPPH: $\underline{\psi}(x,t) = Ce^{i(kx-\omega t)}$.
Vérifier qu'il s'agit bien d'un état stationnaire.

On donne l'équation de Schrödinger: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{\psi}(x,t) + U(x)\underline{\psi}(x,t) = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\underline{\psi}(x,t)$.
Exprimer $\hbar\omega$ en fonction de $\hbar$, m et k. En déduire ce que représente $\hbar\omega$. Commenter.

En déduire la relation de dispersion puis la vitesse de phase puis la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de la particule. Conclure.

Ecrire la normalisation de la particule. Conclure.

Une particule libre est donc mieux représenté par un paquet d'onde soit:



On retient l'inégalité d'Heisenberg aussi appelée relation d'indétermination:

Comment évolue le paquet d'onde au cours du temps?

Exemple: On considère que l'état d'une particule quantique libre est représenté par un paquet d'ondes gaussien formé d'ondes planes progressives, dont les vecteurs d'ondes sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk, qui détermine l'extension spatiale initiale Δx_0 du paquet d'ondes à l'instant initial $t = 0$ autour de la position x_0. La pulsation moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0. On suppose que l'état étudié ici vérifie à l'instant initial $t = 0$: $\Delta x_0.\Delta k_0 = \dfrac{1}{2}$.

1- Exprimer la vitesse de groupe en fonction de $\hbar$, k et m.

2- Montrer que la largeur $\Delta x(t)$ du paquet d'onde à l'instant t s'écrit $\Delta x(t) = \Delta x_0 + \dfrac{\hbar t}{2m\Delta x_0}$. En déduire l'instant t_f pour lequel la largeur du paquet d'onde a doublé.

Application numérique: $\hbar = 1,0.10^{-34}$ $J.s.$ Calculer t_f pour:

- un électron, de masse $m = 10^{-30}$ kg, initialement confiné dans un atome $\Delta x_0 = 10^{-10}$ m

- une gouttelette d'eau, de rayon égal à 10 μm et de masse $m = 4.10^{-12}$ kg.