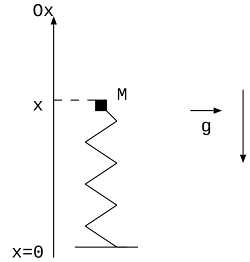
Le portrait de phase

On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'un point matériel de masse m soumis à une force de rappel élastique (ressort de raideur k et de longueur à vide l_0) et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ étant la vitesse du point matériel. L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.



1. Déduire du théorème de la puissance cinétique l'équation différentielle vérifiée par x et la mettre sous la forme $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$.

2. Pour résoudre cette équation différentielle et pour tracer des portraits de phase donnant $\dot{x}$ en fonction de x, on utilise une résolution numérique sous python.

On pose un vecteur $X = [x, \dot{x}]$. Exprimer le vecteur $\dot{X}$ en fonction de $X[0]$, $X[1]$, Q, ω_0 et x_e.

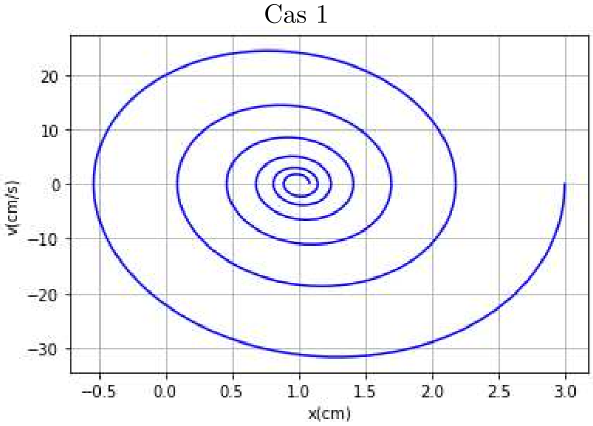
Compléter les lignes 17, 21, 22 et 26 du code suivant qui permet de tracer le portrait de phase:

```
 9 import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphes
10 import numpy as np # pour manipuler les tableaux
11 from scipy.integrate import odeint
12 xe=
13 Q=
14 T0=0.35
15 w0=2*np.pi/T0
16 def eqn(X,t):#fonction qui renvoie le vecteur Xpoint
17     return
18 x0,v0=
19 t=np.linspace(0,6*T0,1000)
20 sol=odeint(eqn,(x0,v0),t)
21 xs=sol[:,......]#solution x(t)
22 vs=sol[:,......]#solution v(t)=xpoint(t)
23 plt.grid()
24 plt.xlabel('x(cm)')
25 plt.ylabel('v(cm/s)')
26 plt.plot(......,........)#tracé du portrait de phase
27 plt.show()
```

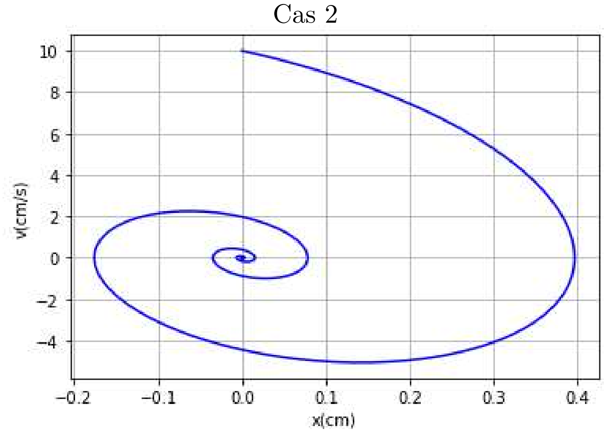
3. On donne les portraits de phase obtenus pour différentes valeurs de Q, x_e, $x_0 = x(t=0)$ et $v_0 = \dot{x}(t=0)$.

Sur chacun des portraits de phase préciser les valeurs numériques de x_0, v_0, x_e et le régime observé.

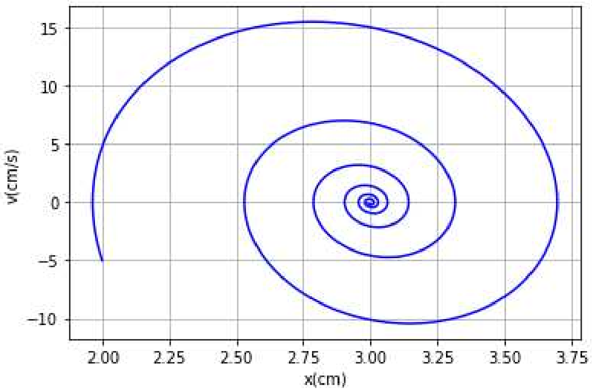
Cas 1



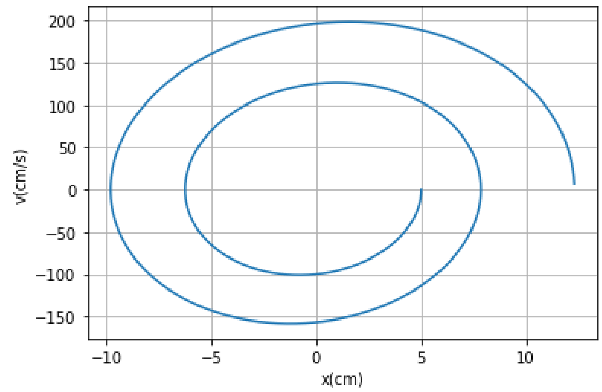
Cas 2



Cas 3



Cas 4

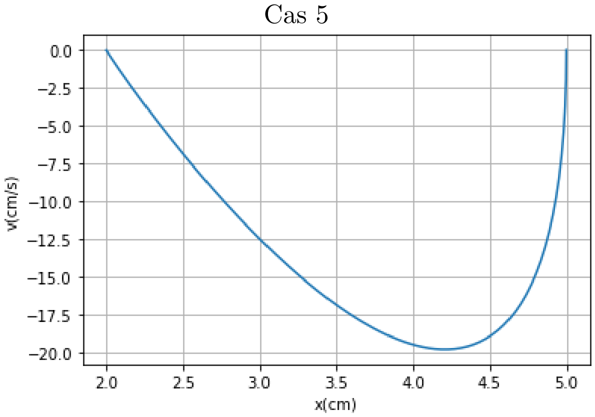


Pour le cas 1, calculer le décrément logarithmique défini par $\delta = \ln(\dfrac{x(t)}{x(t+T)})$. Résoudre l'équation différentielle pour trouver l'expression de $x(t)$ (sans chercher à déterminer les constantes d'intégration) et en déduire l'expression théorique de δ en fonction de ω_0, T et Q.

En faisant l'hypothèse selon laquelle la pseudo période est voisine de la période propre, en déduire la valeur numérique de Q.

4. Dans les deux cas suivants, seule la valeur de Q a été modifiée. Donner les conditions initiales et le nom du régime observé. L'un des cas correspond au régime critique. Identifier le cas concerné et par la théorie donner la valeur numérique de Q et la solution $x(t)$ associée.

Cas 5



Cas 6