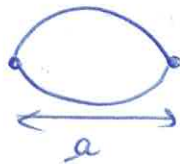


Laser à milis

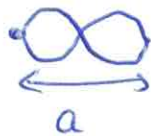
- 1) L'électron est piégé dans le puits de potentiel infini. Il fait donc des aller-retours dans le puits. Sa fonction d'onde est la superposition de nombreuses $\text{e}^{i p x / \hbar}$ et $\text{e}^{-i p x / \hbar}$ qui peut donner une O.S. pour certaines valeurs de l'énergie. Cette O.S. présente deux nœuds (de probabilité de présence) à chaque extrémité du puits puisque la particule ne peut pas se trouver dans les zones où le potentiel est ∞ et que la fonction d'onde est continue. On représente cette O.S.:

pour $n=1$



$$\frac{\lambda_1}{2} = a \quad \text{soit} \quad \lambda_1 = 2a$$

pour $n=2$



$$2 \frac{\lambda_2}{2} = a \quad \text{soit} \quad \lambda_2 = \frac{2a}{2}$$

Ce λ est le $\lambda_{\text{O.S.}}$ de la particule

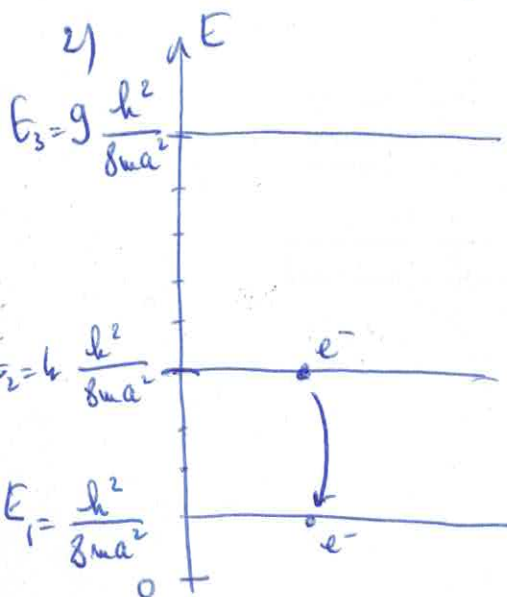
par récurrence $n a$:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2a}{n}} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\text{avec } \lambda_n = \lambda_{\text{O.S.}} = \frac{h}{m v_n} \quad \text{soit} \quad v_n = n \frac{h}{2ma}$$

$$\text{et } \boxed{E_n = \frac{m v_n^2}{2} + 0} = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

dans le puits $V=0$

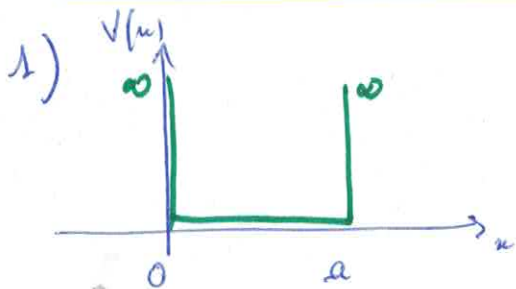


quand l'électron passe du niveau E_2 au niveau E_1 il met un photon d'énergie $E_2 - E_1$. Or l'énergie d'un photon est $E = h f = h \frac{c}{\lambda}$

$$\text{soit } \boxed{\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{(4-1) \frac{h^2}{8ma^2}}}$$

Ce λ est le λ du photon

Particule dans un puits infini



pour $x < 0$ et $x > a$, le potentiel est ∞ , la particule ne peut pas s'y trouver

soit $\Psi(x < 0, t) = \Psi(x > a, t) = 0$

On cherche $\Psi(0 < x < a, t)$.

2) On remplace $\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}$ dans l'éq. de Schrödinger avec $V=0$ puisque on ne trouve dans le puits pour $0 < x < a$, on trouve:

$$\varphi''(x) + \frac{2m E_n}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

O.H. de pulsation spatiale
 $k_n = \sqrt{\frac{2m E_n}{\hbar^2}}$

solution: $\varphi_n(x) = A \cos(k_n x) + B \sin(k_n x)$

on écrit la continuité de $\varphi(x)$ en $x=0$ et $x=a$:

$$\varphi_n(x=0^-) = \varphi_n(x=0^+)$$

soit $0 = A$

$$\varphi_n(x=a^-) = \varphi_n(x=a^+)$$

$$B \sin(k_n a) = 0 \quad \text{soit}$$

$$k_n a = n\pi$$

et $k_n = \frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2m E_n}{\hbar^2}}$

d'où

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$

d'où $\varphi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

(on écrit que la probabilité de trouver la particule sur l'axe (0, a) vaut 1):

On détermine B en normalisant la fonction d'onde soit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \quad \text{or} \quad \Psi(x < 0, t) = \Psi(x > a, t) = 0$$

d'où $\int_0^a |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1$ soit $|B|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1$

d'où $|B| = \sqrt{\frac{2}{a}}$

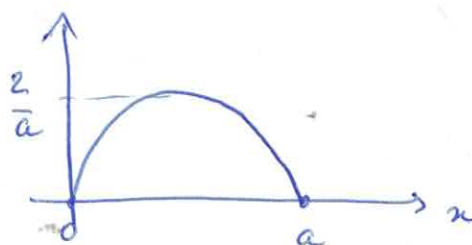
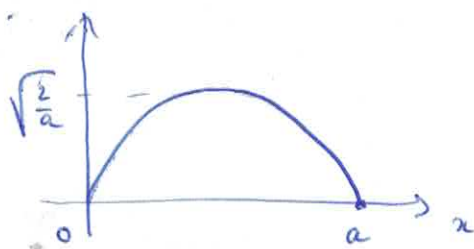
soit $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ et $\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}$

avec $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$

et $|\Psi_n(x, t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

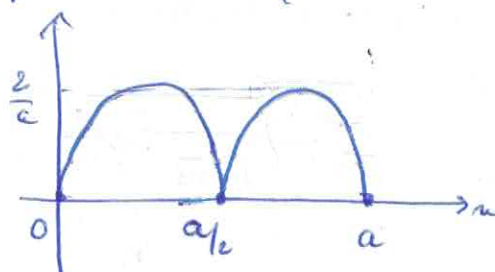
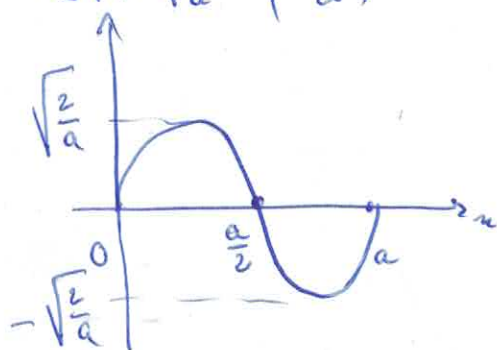
$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$|\Psi_1(x,t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) > 0$$



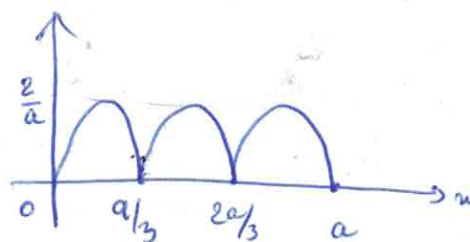
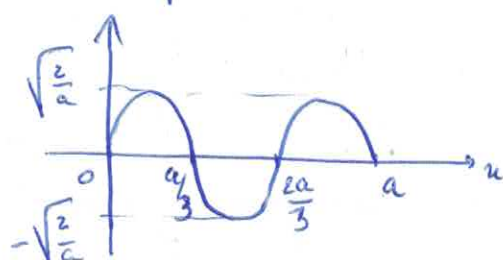
$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$|\Psi_2(x,t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) > 0$$



$$\Psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

$$|\Psi_3(x,t)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) > 0$$



$$3) E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

si la largeur a du puits diminue, les énergies augmentent

b) $\Psi(x,t=0) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$
 en fait cette fonction est $\Psi(x) e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} = \Psi(x)$

on reconnaît $\Psi_3(x,t=0)$ d'où $\Psi(x,t) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}}$
 avec $E_3 = 9 \times \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

5) $\Psi(x,t=0) = C \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + D \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ soit $\Psi(x,t) = C \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + D \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$
 c'est-à-dire : $\Psi_1(x,t=0) = \Psi_1(x)$ $\Psi_2(x,t=0) = \Psi_2(x)$
 avec $E_1 = 1 \times \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$
 $E_2 = 4 \times \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

$$6) E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

pour un proton dans un noyau : $a \approx 10^{-15} \text{ m}$ (taille du noyau)

$$E_1 \approx \frac{(6.6 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 1600 \times 9.1 \cdot 10^{-31} \times (10^{-15})^2} \approx 6,05 \cdot 10^{-11} \text{ J} \approx 3,8 \cdot 10^8 \text{ eV}$$

$$\uparrow$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

pour un électron dans un atome : $a \approx 10^{-10} \text{ m}$ (taille d'un atome)

$$E_1 \approx \frac{(6.6 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \cdot 10^{-31} \times (10^{-10})^2} \approx 6,05 \cdot 10^{-18} \text{ J} \approx 37 \text{ eV}$$

Champ de force appliqué à une particule

1/2

1) $e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}}$: on ne peut prendre l'exponentielle que de quelque chose qui est sans unité soit $\omega_0 t$ est sans unité et $[\omega_0] = s^{-1}$

$$dP = |\Psi|^2 dx \quad \text{d'où} \quad [|\Psi|] = \left[\left(\frac{dP}{dx} \right)^{1/2} \right] = m^{-1/2} \quad \text{soit} \quad [A] = m^{-1/2}$$

2) On normalise la fonction d'onde (cela signifie que l'on écrit que la probabilité de trouver la particule sur l'axe (on veut 1) :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1}$$

soit $\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} dx = 1$

on pose $\alpha = \frac{m \omega_0}{2\hbar}$

soit $A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$ d'où $\boxed{A = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{m \omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4}}$

3) On remplace $\Psi(x,t)$ par la solution proposée dans l'exercice, dans l'équation de Schrödinger soit :

$$\Psi(x,t) = A e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i \frac{\omega_0}{2} \Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = A \left(-\frac{m \omega_0 x}{\hbar} \right) e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}}$$

on dérive ce produit
pour trouver $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = A \left[-\frac{m \omega_0}{\hbar} e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} + \left(-\frac{m \omega_0 x}{\hbar} \right)^2 e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} \right] e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}}$$

$$= \left(-\frac{m \omega_0}{\hbar} + \left(\frac{m \omega_0 x}{\hbar} \right)^2 \right) \underbrace{A e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{2\hbar}} e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}}}_{\Psi}$$

$$= \left(-\frac{m \omega_0}{\hbar} + \left(\frac{m \omega_0 x}{\hbar} \right)^2 \right) \Psi$$

2/ on en remplaçant dans l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar} + \left(\frac{m\omega_0 x}{\hbar} \right)^2 \right] \psi + U(x) \psi = i\hbar \left(-i \frac{\omega_0}{2} \right) \psi$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + U(x) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}}$$

on en déduit la force car $\boxed{F = -\frac{dU}{dx} = -m\omega_0^2 x}$

on trouve une force de rappel élastique (loi de Hooke) :
c'est une oscillation harmonique