

# DS 9 de physique

Le sujet comprend 4 problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix.

Il est demandé de numéroter les pages au format  $i/N$  où  $i$  est le numéro de la page et  $N$  le nombre de pages, d'encadrer les résultats et de tirer un trait entre chaque question.

Tout résultat doit être justifié par une loi, en donnant le nom de la loi et les hypothèses d'application de celle-ci.

## I. Problème I: Etude de la transmission par une fibre optique

L'onde lumineuse se propage dans la fibre optique, considérée comme un guide de section  $S$  et d'axe de révolution  $Oz$ . On note  $\vec{R}$  le vecteur de Poynting de l'onde lumineuse,  $\Pi(z)$  la moyenne temporelle de la composante du vecteur de Poynting selon  $Oz$  et enfin  $P(z)$  la puissance moyenne véhiculée à travers cette section.

La communication par fibre permet des débits très élevés. Simultanément, la propagation sur de longues distances pose un problème d'atténuation. Cette atténuation, mesurée en décibel par kilomètre, s'écrit, pour une propagation entre les abscisses  $z = 0$  et  $z = d$ :  $A(dB.km^{-1}) = \frac{10}{d(km)} \log\left(\frac{P(0)}{P(d)}\right)$

Elle dépend de la longueur d'onde utilisée, selon le schéma de la figure 2 suivante.

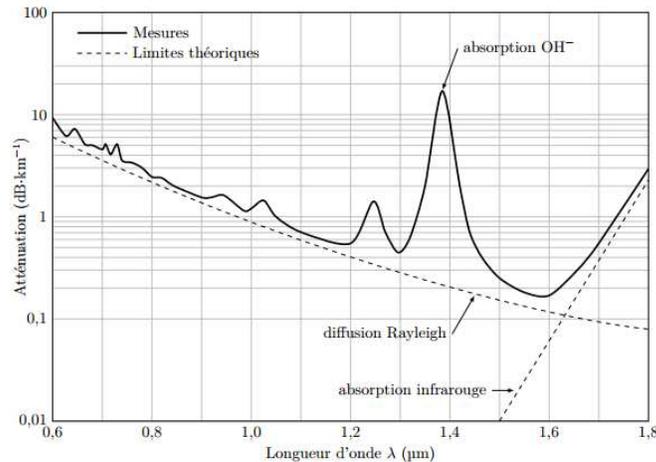


Figure 2 Atténuation dans une fibre de silice en fonction de  $\lambda$

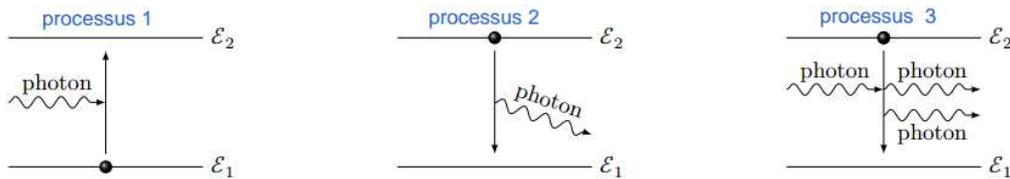
Pour les applications numériques, on envisagera une fibre à température ordinaire, parcourue par un signal de longueur d'onde  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ , pour laquelle  $A = 0,2 \text{ dB.km}^{-1}$ . La puissance lumineuse injectée dans la fibre est typiquement  $P(0) = 300 \mu\text{W}$  et la puissance minimale détectée par un récepteur vaut  $P_{min} = 10 \mu\text{W}$ .

Données:  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  et  $h = 6,6.10^{34} \text{ J.s}$

1. Dans quel domaine optique se situent les ondes propagées par la fibre ? Donner l'ordre de grandeur des fréquences associées et justifier le choix de longueur d'onde effectué pour propager le signal dans la fibre.
2. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{R}(M, t)$ , en fonction du champ électromagnétique de l'onde lumineuse. Préciser la relation entre  $\Pi(z)$ ,  $S$  et  $P(z)$ .
3. Justifier par des arguments numériques précis la nécessité d'une amplification du signal, par exemple pour des liaisons entre continents. Calculer la distance maximale entre deux amplificateurs de signal placés sur la fibre.

### Amplification du signal par une fibre dopée à l'erbium

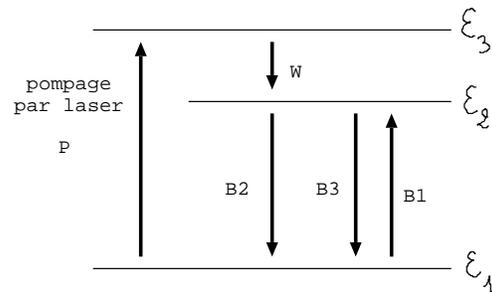
L'amplification du signal est réalisée dans une portion, de longueur  $L$ , de fibre dopée avec des ions erbium  $Er^{3+}$ . Cet ion est modélisé comme un système à deux niveaux, le niveau fondamental 1, d'énergie  $\mathcal{E}_1$ , et un niveau excité 2, d'énergie  $\mathcal{E}_2$ . Il y a  $n_0$  ions  $Er^{3+}$  par unité de volume, dont  $n_1$  dans le niveau 1 et  $n_2$  dans le niveau 2. L'interaction entre ces ions  $Er^{3+}$  et le rayonnement se fait suivant les trois processus quantiques illustrés par la figure suivante:



4. Donner le nom et décrire chacun des processus en précisant, dans le cas de l'émission, les propriétés du photon émis.
  5. Exprimer la longueur d'onde des photons concernés par les trois processus en fonction de la constante de Planck, de la vitesse de la lumière dans le vide et des énergies  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ .
- On donne les puissances par unité de volume reçue ou perdue par les ions au cours du processus 1:  $\sigma n_1(z)\Pi(z)$  et du processus 3:  $\sigma n_2(z)\Pi(z)$  où  $\sigma$  est une constante caractéristique de l'ion  $Er^{3+}$ , appelée section efficace.
6. Préciser l'unité de  $\sigma$ .
  7. En effectuant un bilan de puissance de l'onde électromagnétique dans la tranche de fibre de section  $S$  comprise entre  $z$  et  $z + dz$ , montrer que  $\frac{d\Pi}{dz} = \sigma(n_2 - n_1)\Pi(z)$  dans le cas où l'on néglige le processus 2.
  8. Justifier le fait que l'on néglige le processus 2 dans l'équation précédente.
  9. Dédurre de l'équation trouvée la condition d'amplification du faisceau.
  10. Exprimer le rapport  $\frac{n_2}{n_1}$  en utilisant la loi de Boltzmann à l'équilibre thermodynamique de température  $T$ . La condition d'amplification peut elle être satisfaite à l'équilibre thermodynamique? Conclure.

### Amplification par pompage optique

Le pompage optique des ions  $Er^{3+}$  est réalisé par une diode laser qui amène les atomes dans un niveau d'énergie  $\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2$ . On donne le schéma à trois niveaux d'énergie de l'ion erbium. On donne le coefficient  $P$  lié au pompage, le coefficient  $W$  lié à la désexcitation radiative du niveau 3 au niveau 2, et les coefficients  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  liés aux processus 1, 2 et 3 décrits précédemment. **Ces coefficients sont tous donnés en  $s^{-1}$ .**



11. L'onde pompe issue de la diode laser a une longueur d'onde  $\lambda_p = 1,48 \mu m$ . Déterminer la différence  $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$ . Calculer la longueur d'onde  $\lambda_{32}$  associée à cette transition.
12. Exprimer  $\frac{dn_3}{dt}$  et  $\frac{dn_2}{dt}$  en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et des coefficients  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $W$  et  $P$  en justifiant les expressions écrites.
13. En régime stationnaire, montrer qu'il y a inversion de population à condition que  $P > B_2 + B_3 - B_1$ .

## II. Problème II: Etude des performances acoustiques d'une paroi

L'isolation phonique permet de réduire la transmission du son à travers les parois d'un bâtiment. La qualité d'un isolant sonore est caractérisée par son indice d'affaiblissement acoustique que nous allons estimer pour le matériau appelé Kairlin à partir de mesures expérimentales.

### Modélisation de la propagation des ondes acoustiques

Tout d'abord, on cherche à obtenir une expression des grandeurs associées aux ondes sonores supposées longitudinales et planes. On introduit ainsi les grandeurs caractéristiques de l'air suivantes :

- Masse volumique :  $\rho(x, t) = \rho_a + \rho_1(x, t)$
- Pression :  $P(x, t) = P_a + P_1(x, t)$
- Champ de vitesse :  $\vec{v}_1(x, t)$

- Coefficient de compressibilité isentropique :  $\chi_S = \frac{1}{\rho_a} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S$ .

On néglige la pesanteur et la viscosité de l'air devant les forces de pression.

1. Rappeler sous forme d'inégalités les hypothèses de l'approximation acoustique.

2. Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'onde de pression vérifie une équation de type d'Alembert. Ecrire cette équation. La célérité des ondes acoustiques se met sous la forme  $c = \rho_a^\alpha \chi_S^\beta$ . Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

On définit l'impédance acoustique d'un milieu comme le rapport entre la surpression acoustique et l'amplitude de la vitesse, on rappelle:

-  $P_1 = Zv_1$  si l'onde est directe (propagation dans le sens des  $x$  croissants)

-  $P_1 = -Zv_1$  si l'onde est rétrograde (propagation dans le sens des  $x$  décroissants)

avec  $Z = \rho_a c$ .

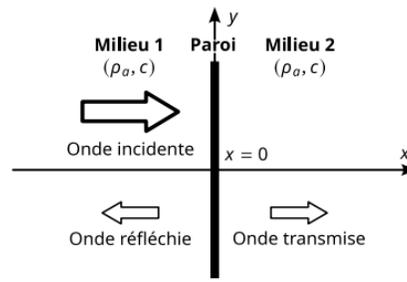
3. Montrer à l'aide de la question précédente que le produit  $\rho_a c$  a bien la même unité qu'un rapport pression sur vitesse.

4. On admet que la surpression s'écrit  $P_1(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ . Exprimer l'onde de vitesse  $v(x, t)$  en fonction de  $Z$ ,  $f$  et  $g$ .

### Réflexion et transmission des ondes acoustiques

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde acoustique à travers une paroi située en  $x = 0$ , modélisée par une plaque rigide infiniment fine séparant deux milieux identiques semi-illimités et constitués d'air.

Une onde acoustique incidente dans le milieu 1 en direction de la plaque donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise.



En notation complexe on écrit la surpression de l'onde incidente:  $\underline{P}_i(x, t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)}$ .

On définit les coefficients de réflexion et de transmission par  $\underline{r} = \frac{\underline{P}_r(0, t)}{\underline{P}_i(0, t)}$  et  $\underline{\tau} = \frac{\underline{P}_t(0, t)}{\underline{P}_i(0, t)}$ .

5. Exprimer en notation complexe les ondes de surpression  $\underline{P}_r(x, t)$ ,  $\underline{P}_t(x, t)$  et de vitesse  $\underline{v}_i(x, t)$ ,  $\underline{v}_r(x, t)$  et  $\underline{v}_t(x, t)$  en utilisant les notations données pour  $\underline{P}_i(x, t)$  ainsi que  $Z$ ,  $\underline{r}$  et  $\underline{\tau}$ .

6. Dédurre de la continuité des vitesses que  $1 - \underline{r} = \underline{\tau}$ .

On note  $\sigma$  la masse surfacique de la paroi de surface  $S$ .

7. Par application de la deuxième loi de Newton à la paroi montrer que l'on a:

$\sigma \frac{dv_x}{dt}(0, t) = \underline{P}_i(0, t) + \underline{P}_r(0, t) - \underline{P}_t(0, t)$ . En déduire une équation reliant  $\underline{\tau}$ ,  $\underline{r}$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $Z$  et  $i$  (l'imaginaire pur).

8. Dédurre des équations précédentes que  $\underline{\tau}$  peut se mettre sous la forme  $\underline{\tau} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$ . Exprimer  $\omega_c$  en fonction de  $Z$  et  $\sigma$ .

9. Déterminer le coefficient de transmission en énergie par  $T_{dB} = 10 \log \left( \frac{I_t(x=0)}{I_i(x=0)} \right)$  où l'intensité acoustique

$I$  s'écrit  $I(x) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P} \cdot \underline{v}^*)$ . Exprimer  $T_{dB}$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_c$ .

La paroi se comporte comme un filtre. Préciser sa nature. Donner les équations des asymptotes à BF et HF de  $T_{dB}$  en fonction de  $\log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$  et tracer le diagramme de Bode asymptotique ainsi que l'allure du diagramme de Bode réel.

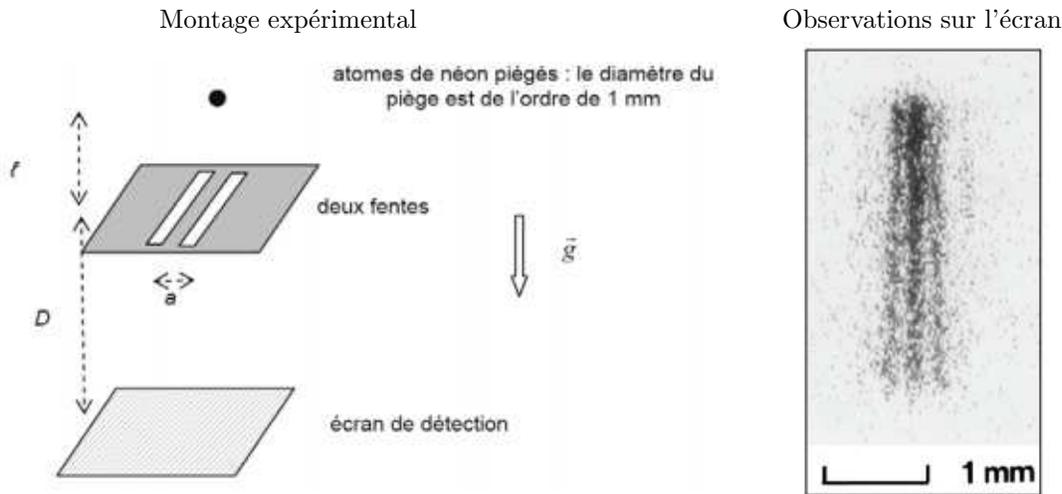
### III. Problème III: mécanique quantique

Données pour tout le problème:

constante d'Avogadro:  $\mathcal{N}_a = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , constante de Planck:  $h = 6,6.10^{-34} \text{ J.s}$ , constante de Planck réduite:  $\hbar = 1,0.10^{-34} \text{ J.s}$ , accélération de la pesanteur:  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , masse molaire du néon:  $M = 20 \text{ g.mol}^{-1}$ , masse d'un électron:  $m_e = 9.10^{-31} \text{ kg}$ , constante de Boltzmann:  $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ SI}$ , vitesse de la lumière:  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

#### Dualité onde corpuscule

En 1992, une équipe japonaise a réalisé une expérience d'interférences atomiques. Le dispositif expérimental est indiqué ci-dessous. Ce dispositif utilise des atomes de néon piégés et refroidis par laser à une température de  $2,5 \text{ mK}$  de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Lorsque ces atomes quittent le piège, ils tombent dans le champ de pesanteur et sont alors en chute libre. Le piège est situé à une hauteur  $l = 76 \text{ mm}$  au-dessus de deux fentes d'Young de largeur  $b = 2 \mu\text{m}$  séparées de la distance  $a = 6 \mu\text{m}$ . Un écran MPC (Microchannel Plate Detector) situé à la distance  $D = 113 \text{ mm}$  de la double fente détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de  $20 \mu\text{m}$ .



1. Comment se manifestent sur l'écran d'observation les caractères corpusculaire d'une part et ondulatoire d'autre part des atomes de néon ?

2.

2.a. Déterminer l'expression de la vitesse  $v_f$  avec laquelle les atomes de néon atteignent les fentes de Young (on supposera leur vitesse initiale négligeable). En déduire la valeur de la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$  associée aux atomes de néon au niveau des fentes de Young. Faire l'application numérique.

2.b. Estimer la largeur de la tache de diffraction pour un atome diffracté par une des fentes et estimer également l'interfrange. Faire l'application numérique. Comparer aux grandeurs mesurées sur l'écran.

2.c. Pourquoi est-il plus difficile de réaliser une telle expérience avec des atomes plutôt qu'avec des électrons? Pourquoi utilise-t-on des atomes dits froids?

#### Particule dans un puits infini

On modélise une diode laser par un puits quantique infini de largeur  $L$ . Le potentiel  $U(x)$  lié à ce puits est nul pour  $0 < x < L$  et infini à l'extérieur du puits pour  $x < 0$  et pour  $x > L$ . Une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  est décrite par la fonction d'onde  $\underline{\psi}(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$ . Elle satisfait l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{\psi}(x, t) + U(x) \underline{\psi}(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}(x, t)$$

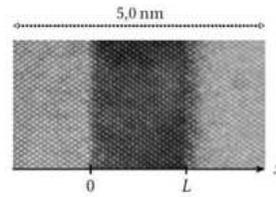
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\phi(x)$  en déduire  $\phi(x)$  pour  $0 < x < L$  en fonction de deux constantes d'intégration.

4. Que dire de  $\phi(x = 0)$ ?  $\phi(x = L)$ ? de  $\int_0^L |\phi(x)|^2 dx$ ? Justifier vos réponses.

5. Montrer que  $\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} x\right)$ . Donner l'expression de  $E_n$  en fonction d'un entier  $n$  strictement positif et des données.

Rappel:  $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$ .

6. En utilisant le document ci-contre, déterminer la largeur du puits quantique caractéristique de la diode étudiée puis l'énergie du niveau le plus bas, en supposant que la particule quantique placée dans le puits de potentiel est un électron.



7. Calculer la longueur d'onde du photon émis lors de la transition  $n = 5$  vers  $n = 1$ .