

Correction DS 9

I. Correction: fibre optique (extrait Centrale PC 2018)

1. On a $f = \frac{c}{\lambda} = 1,90.10^{14} \text{ Hz}$ soit 190 THz . C'est le domaine de l'infra rouge.

D'après la figure 2, l'absorption est minimale pour des longueurs d'onde comprises entre $1,5 \mu\text{m} = 1550 \text{ nm}$ et $1,6 \mu\text{m} = 1600 \text{ nm}$. On choisit donc cette longueur d'onde pour une atténuation minimale.

2. Le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est égal à la puissance du faisceau soit $P(z) = \iint \langle \vec{R} \rangle \cdot dS \vec{e}_z = \Pi(z)S$.

3. L'atténuation est définie par $A = \frac{10}{d} \log\left(\frac{P(0)}{P(d)}\right)$. Cherchons la distance maximale parcourue par l'onde pour arriver au détecteur avec la puissance minimale de détection soit $P(d) = 10 \mu\text{W}$ pour $P(0) = P_{\min} = 300 \mu\text{W}$.

On a donc $d = \frac{10}{A} \log\left(\frac{P(0)}{P_{\min}}\right) = 73,8 \text{ km}$.

Pour propager des signaux sur des distances supérieures à $73,8 \text{ km}$, il est donc indispensable d'amplifier le signal. La distance maximale entre deux amplificateurs est de $73,8 \text{ km}$.

4. Le processus 1 est le processus d'absorption. L'atome absorbe un photon d'énergie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ pour passer du niveau 1 au niveau 2.

Le processus 2 est le processus d'émission spontanée. L'atome émet un photon d'énergie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ en passant du niveau 2 au niveau 1. Le photon émis a une direction de propagation, une polarisation et une phase aléatoires.

Le processus 3 est le processus d'émission stimulée. L'atome, éclairée par un photon d'énergie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, émet un photon jumeau de même énergie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, de même direction de propagation, de même polarisation et de même phase que le photon incident.

5. L'énergie du photon est $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$ avec $E = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ d'où la longueur d'onde des photons émis et absorbés $\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1}$.

6. $[\Pi] = \text{W.m}^{-2}$ et $[n] = \text{atomes.m}^{-3}$.

Le terme $\sigma n_1 \Pi$ est une puissance volumique exprimée en W.m^{-3} .

On a donc $[\sigma] = \frac{\text{W.m}^{-3}}{\text{W.m}^{-2} \cdot \text{m}^{-3}} = \text{m}^2$: σ est homogène à une surface.

7. Soit le système élémentaire contenant des ions Er^{3+} compris entre z et $z + dz$.

La puissance qui entre dans ce système est $P_e = \Pi(z)S$.

La puissance qui sort de ce système est $P_s = \Pi(z + dz)S$.

La puissance reçue par ce système est fournie par les photons émis par émission stimulée: la puissance reçue par unité de volume est $\sigma_e n_2(z) \Pi(z)$ donc la puissance reçue dans le volume Sdz du système est $P_r = \sigma_e n_2(z) \Pi(z) Sdz$.

La puissance perdue par ce système est perdue par le phénomène d'absorption: la puissance perdue par unité de volume est $\sigma^a n_1(z) \Pi(z)$ donc la puissance perdue dans le volume Sdz du système est $P_p = \sigma^a n_1(z) \Pi(z) Sdz$.

En régime stationnaire, la puissance totale reçue par le système est égale à la puissance totale perdue par le système soit $P_e + P_r = P_s + P_p$ d'où $\Pi(z)S + \sigma_e n_2(z) \Pi(z) Sdz = \Pi(z + dz)S + \sigma^a n_1(z) \Pi(z) Sdz$.

On a donc $\sigma_e n_2(z) \Pi(z) Sdz - \sigma^a n_1(z) \Pi(z) Sdz = (\Pi(z + dz) - \Pi(z))S$ soit $(\sigma_e n_2(z) - \sigma^a n_1(z)) \Pi(z) dz = \frac{d\Pi}{dz} dz$

d'où l'équation demandée $(\sigma_e n_2(z) - \sigma^a n_1(z)) \Pi(z) = \frac{d\Pi}{dz}$.

8. L'émission spontanée est négligeable car les photons émis partent dans toutes les directions de l'espace et ici l'amplification sert à amplifier le faisceau dans sa direction de propagation Oz . L'émission stimulée émet des photons jumeaux qui ont donc la direction de la lumière incidente soit la direction Oz voulue.

9. Pour amplifier le faisceau il faut avoir $\frac{d\Pi}{dz} > 0$ soit $\sigma^e n_2 > \sigma^a n_1$.

10. La statistique de Boltzmann conduit à $\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{k_B T}} < 1$. Ainsi pour réaliser la condition d'amplification $n_2 > n_1$ il faut procéder à un pompage.

11. On a $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda}$ et $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda_p}$. On en déduit $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{\lambda}\right)$. AN: $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = 6,04.10^{-30} J$ et $\lambda_{32} = \frac{\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2}{hc} = 30,5 \mu m$.

12. Le pompage fait augmenter le nombre d'atomes dans l'état 3 et le pompage se produit en présence d'atomes dans le niveau 1 donc $\frac{dn_3}{dt}_{pompage} = +Pn_1$.

La désexcitation de 3 vers 2 fait diminuer le nombre d'atomes dans l'état 3 et se produit en présence d'atomes dans le niveau 3 donc $\frac{dn_3}{dt}_{desexcitation} = -Wn_3$.

On a donc $\frac{dn_3}{dt} = Pn_1 - Wn_3$.

De la même façon on a $\frac{dn_2}{dt} = +Wn_3 + B_1n_1 - B_2n_2 - B_3n_2$.

13. En régime stationnaire on a $\frac{dn_3}{dt} = Pn_1 - Wn_3 = 0$ soit $Wn_3 = Pn_1$.

On a également $\frac{dn_2}{dt} = +Wn_3 + B_1n_1 - B_2n_2 - B_3n_2 = Pn_1 + B_1n_1 - B_2n_2 - B_3n_2 = 0$ d'où $\frac{n_2}{n_1} = \frac{P + B_1}{B_2 + B_3}$.

Il y a inversion de population pour $\frac{n_2}{n_1} > 1$ soit pour $\frac{P + B_1}{B_2 + B_3} > 1$ ou encore $P + B_1 > B_2 + B_3$ ou encore $P > B_2 + B_3 - B_1$.

II. Performances acoustiques (extrait modélisation PC 2023)

1. L'approximation acoustique consiste à linéariser les équations mécanique et thermodynamique en faisant l'hypothèse que $P_1 \gg P_a$, $\rho_1 \ll \rho_a$ et $v_1 \ll c$.

2. L'équation de d'Alembert s'écrit $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$.

$$[\chi_S] = \left[\frac{1}{P}\right] = \left[\frac{S}{F}\right] = \frac{m^2}{kg.m.s^{-2}} = m.s^2.kg^{-1}$$

$$[\rho] = kg.m^{-3}$$

$$\text{on a donc } [c] = [\rho_a^\alpha \chi_S^\beta] \text{ donne } m.s^{-1} = kg^\alpha.m^{-3\alpha}.m^\beta.s^{2\beta}.kg^{-\beta} = kg^{\alpha-\beta}.m^{-3\alpha+\beta}.s^{2\beta}$$

Par identification $\alpha - \beta = 0$, $-3\alpha + \beta = 1$ et $2\beta = -1$ qui conduit à $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ soit $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_a \chi_S}}$: les ondes sonores vont d'autant plus vite que le milieu est peu dense (ρ_a petit) et rigide ou peu compressible (χ_S petit).

3. D'après la question précédente $c^2 = \frac{1}{\rho_a \chi_S}$ soit $\rho_a c = \frac{1}{\chi_S c} = \frac{P}{c}$ car χ_S est homogène à l'inverse d'une pression.

4. Dans la solution $P_1(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$, le terme $f(t - x/c)$ désigne une onde progressive selon $+Ox$, on peut donc lui associer l'onde de vitesse $\frac{f(t - x/c)}{+Z}$ et le terme $g(t + x/c)$ désigne une onde progressive selon $-Ox$, on peut donc lui associer l'onde de vitesse $\frac{g(t + x/c)}{-Z}$. L'onde de vitesse s'écrit donc $v(x, t) = \frac{f(t - x/c) - g(t + x/c)}{Z}$.

5. L'onde incidente se propage selon $+Ox$ donc $\underline{v}_i(x, t) = \frac{P_0}{Z} e^{i(\omega t - kx)}$.

L'onde réfléchie se propage dans le sens $-Ox$ donc sa phase s'écrit $\omega t + kx$ soit $\underline{P}_r(x, t) = \underline{r}P_0 e^{i(\omega t + kx)}$ et $\underline{v}_r(x, t) = \frac{\underline{r}P_0}{-Z} e^{i(\omega t + kx)}$.

L'onde réfléchie se propage dans le sens $+Ox$ donc sa phase s'écrit $\omega t - kx$ soit $\underline{P}_t(x, t) = \underline{t}P_0 e^{i(\omega t - kx)}$ et

$$\underline{v}_t(x, t) = \frac{\tau P_0}{Z} e^{i(\omega t - kx)}.$$

6. La continuité de la vitesse s'écrit en $x = 0$: $\underline{v}_1(0, t) = \underline{v}_2(0, t)$ soit $\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \underline{v}_t(0, t)$ qui donne après simplification $1 - \underline{r} = \tau$.

7. La paroi est soumise à la force de pression de l'air du milieu 1: $(P_a + \underline{P}_1)S\vec{e}_x$ et à la force de pression de l'air du milieu 2: $-(P_a + \underline{P}_2)S\vec{e}_x$.

La résultante des forces de pression sur la paroi en $x = 0$ s'écrit $[(P_a + \underline{P}_1(0, t)) - (P_a + \underline{P}_2(0, t))]S\vec{e}_x = (\underline{P}_1(0, t) - \underline{P}_2(0, t))S\vec{e}_x$.

Le poids de la paroi est compensée par la réaction du support.

La RFD appliquée à la paroi de masse σS s'écrit dans le référentiel galiléen s'écrit:

$$m\vec{a}_{paroi} = (\underline{P}_1(0, t) - \underline{P}_2(0, t))S\vec{e}_x \text{ avec } m = \sigma S, \underline{P}_1(0, t) = \underline{P}_i(0, t) + \underline{P}_r(0, t).$$

La paroi est rigide donc son accélération est l'accélération de l'air dans le milieu 1 en $x = 0$ qui est égale à l'accélération de l'air dans le milieu 2 en $x = 0$ soit $\vec{a}_{paroi} = \frac{dv_1}{dt}(0, t)\vec{e}_x = \frac{dv_2}{dt}(0, t)\vec{e}_x$. On garde l'expression en fonction de $\underline{v}_2(0, t) = \underline{v}_t(0, t)$ car elle ne contient qu'un terme, celui de l'onde transmise.

On a donc après simplification par S et projection sur \vec{e}_x : $\sigma \frac{dv_2}{dt}(0, t) = \underline{P}_1(0, t) - \underline{P}_2(0, t)$.

avec $\underline{v}_2 = \underline{v}_t$, $\underline{P}_1 = \underline{P}_i + \underline{P}_r$ et $\underline{P}_2 = \underline{P}_t$ soit:

$$\sigma \frac{dv_t}{dt}(0, t) = \underline{P}_i(0, t) + \underline{P}_r(0, t) - \underline{P}_t(0, t).$$

En remplaçant les expressions des ondes de pression et vitesse et en utilisant le fait qu'en notation complexe on a $\frac{d}{dt} = i\omega$, on obtient: $\sigma i\omega \frac{tP_0}{Z} = P_0 + \underline{r}P_0 - \tau P_0$ soit $1 + \underline{r} = \tau(1 + \frac{i\sigma\omega}{Z})$.

8. On résout le système $1 + \underline{r} = \tau(1 + \frac{i\sigma\omega}{Z})$ et $1 - \underline{r} = \tau$, on en déduit $2 = \tau(2 + \frac{i\sigma\omega}{Z})$ soit $\tau = \frac{2}{2 + \frac{i\sigma\omega}{Z}} = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma\omega}{2Z}}$ soit par identification $\omega_c = \frac{2Z}{\sigma}$.

9. On a $I_i = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(P_0 \frac{P_0}{Z}) = \frac{P_0^2}{2Z}$.

On a $I_t = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(P_0 \tau \frac{P_0 \tau^*}{Z}) = \frac{P_0^2 |\tau|^2}{2Z}$.

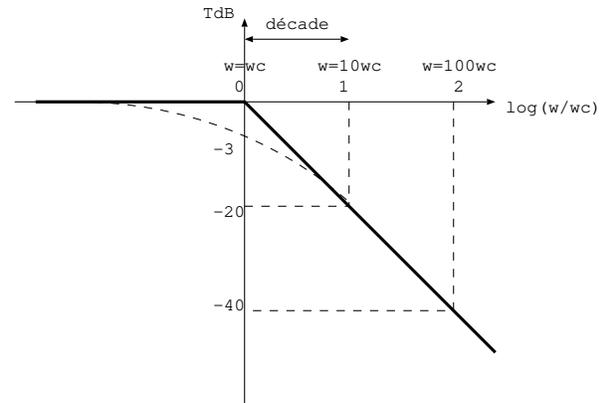
On en déduit $T_{dB} = 10 \log(|\tau|^2) = 10 \log(\frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}) = -10 \log(1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2)$.

Plus les fréquences sont élevées et plus le coefficient T_{dB} est petit ce qui signifie que les ondes de haute fréquence sont moins bien transmises que les ondes de basse fréquence. La paroi se comporte comme un filtre passe bas.

Pour $\omega \ll \omega_c$: $T_{dB} = -10 \log 1 = 0 \text{ dB}$

Pour $\omega \gg \omega_c$: $T_{dB} = -10 \log(\frac{\omega}{\omega_c})^2 = -20 \log(\frac{\omega}{\omega_c})$: asymptote de pente -20 dB par décade.

Pour tracer la courbe réelle, elle est confondue avec ses asymptotes à BF et HF et elle passe par le point de coordonnées: $(\frac{\omega}{\omega_c} = 1, -10 \log 2 = -3 \text{ dB})$.



III. Pb III

1. La nature ondulatoire se manifeste par la présence de franges d'interférences: les franges brillantes correspondent à un maximum de probabilité de présence des particules (ici les franges brillantes sont noires car un impact de particules donne un point noir) et les franges sombres à un minimum de probabilité de présence (ici les franges sombres sont blanches puisqu'en absence d'impact l'écran est blanc).

La nature corpusculaire se manifeste par la présence d'impacts ponctuels.

2. **2.a.** RFD appliquée à un atome en chute libre: $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\ddot{z} = g$ (en projetant sur un axe vertical descendant) et par intégrations successives $\dot{z} = gt$ et $z = \frac{gt^2}{2}$.

L'atome atteint les fentes à l'instant t_f tel que $z(t_f) = l = \frac{gt_f^2}{2}$ soit $t_f = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ et donc sa vitesse à cet instant est $\dot{z}(t_f) = gt_f = \sqrt{2gl} = 1,22 \text{ m.s}^{-1}$.

On en déduit la longueur d'onde de De Broglie $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

2.b. La largeur Δx de la tache de diffraction se déduit de la demi largeur angulaire $\theta_{1/2}$ de la tache centrale de diffraction à travers une fente soit $\theta_{1/2} = \frac{\lambda_{DB}}{b} = \frac{\Delta x}{2D}$ d'où $\Delta x = \frac{2D\lambda_{DB}}{b} = 1,81 \text{ mm}$.

L'interfrange i s'écrit $i = \frac{\lambda_{DB}D}{a} = 0,30 \text{ mm}$.

Expérimentalement on mesure $i_e \approx \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ mm}$. L'écart entre la théorie et l'expérience peut venir du fait que l'on a négligé la vitesse initiale des particules. En réalité $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1,7 \text{ m.s}$, vitesse des atomes à la sortie du piège.

2.c. Plus les atomes sont lourds et rapides et plus leur longueur d'onde de De Broglie est grande. Or pour que le caractère ondulatoire se manifeste il faut que la longueur d'onde soit de l'ordre de la taille des systèmes donc il faut que la longueur d'onde de De Broglie ne soit pas trop grande.

3. $\phi(x)$ vérifie l'équation différentielle $\phi(x)'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi(x) = 0$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation spatiale $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Dans un puits on peut prendre des solutions réelles de la forme $\phi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$.

4. La particule ne peut pas se trouver dans une zone de potentiel infini donc $\phi(x < 0) = \phi(x > L) = 0$.

La normalisation s'écrit $\int_0^L |\phi(x)|^2 dx = 1$, elle traduit que la particule se trouve entre $x = 0$ et $x = L$ donc sa probabilité de présence entre $x = 0$ et $x = L$ vaut un.

5. On applique la continuité de ϕ en $x = 0$ et $x = L$:

$$\phi(x = 0) = 0 = A$$

$$\phi(x = 0) = 0 = B \sin(kL) \text{ soit } \sin(kL) = 0 \text{ et } k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ d'où } \phi(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ où } n \text{ est entier positif.}$$

$$\text{On normalise la fonction soit } \int_0^L B^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{B^2}{2} \int_0^L (1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)) dx = \frac{B^2 L}{2} = 1 \text{ soit } B = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

$$\text{De plus } k_n = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} \text{ donne } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

6. Le puits a pour largeur $L = \frac{1,25}{3} = 2 \text{ nm}$. L'énergie du fondamental pour $n = 1$ s'écrit $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 1,37 \cdot 10^{-20} \text{ J}$.

7. Le photon émis lors de la transition a pour énergie $E_5 - E_1 = (25 - 1)E_1 = \frac{hc}{\lambda}$ d'où $\lambda = \frac{hc}{24E_1} = 602 \text{ nm}$: lumière visible rouge.

IV. Protection des données bancaires

1. Les électrons subissent leur poids, la force électrique et la force de frottements $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Le poids est négligeable devant les autres forces.

On applique la RFD à un électron dans le référentiel d'étude galiléen: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$, d'où l'équation différentielle vérifiée par \vec{v} : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{-e}{m}\vec{E}$.

2. Cette équation est valable en notation complexe, elle conduit à $i\omega\vec{v} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{-e}{m}\vec{E}$ d'où l'expression de la vitesse $\vec{v}_0 = \frac{\frac{-e\tau}{m}E_0\vec{e}_x}{1+i\omega\tau}$.

3. On a $\vec{j} = n^*(-e)\vec{v} = \frac{n^*e^2\tau}{1+i\omega\tau}\vec{E}$.

4. Par identification avec la loi d'Ohm qui s'écrit $\vec{j} = \underline{\gamma}\vec{E}$, on trouve la conductivité de ce métal $\underline{\gamma} = \frac{n^*e^2\tau}{1+i\omega\tau}$.

Par identification avec l'énoncé $\gamma_0 = \frac{n^*e^2\tau}{m}$ et $g(\omega) = \omega\tau$.

5. On veut pouvoir négliger $g(\omega)$ devant 1 soit:

$$g(\omega) = \omega\tau = 2\pi f\tau \ll 1 \text{ pour } f \ll \frac{1}{2\pi\tau} = f_{lim} = 1,6.10^{13} \text{ Hz.}$$

6. Pour les communications NFC-RFID, Les fréquences utilisées ici sont de l'ordre de $14 \text{ MHz} = 14.10^6 \text{ Hz} \ll f_{lim}$: on est dans bien dans le cas où la conductivité est γ_0 , elle est réelle et $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$.

7. On fait le rapport entre le courant de conduction $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ soit:

$$\frac{j}{j_D} = \frac{\gamma_0 E}{\epsilon_0 \omega E} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0 2\pi f} = 5.10^{10} \gg 1 \text{ donc le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.}$$

8. L'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma_0\vec{E}$. Cette approximation s'appelle l'approximation des régimes quasi stationnaires. En régime variable, un champ magnétique est créé par des courants et par des champs électriques variables. Dans l'ARQS, on néglige la contribution des champs électriques variables.

9. On écrit la loi de conservation de la charge $\vec{\text{div}}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ avec $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$ et d'après Maxwell gauss $\vec{\text{div}}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. En combinant ces équations on obtient l'équation différentielle: $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma_0\rho}{\epsilon_0} = 0$ de la forme $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\tau'} = 0$ avec $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} = 2,3.10^{-19} \text{ s}$. La solution s'écrit $\rho = \rho_0 e^{-t/\tau'}$.

10. Ce qui signifie que ρ s'annule au bout d'un temps $5\tau' \approx 10^{-18} \text{ s}$ qui est négligeable devant la période des ondes $T = \frac{1}{f} \approx 10^{-7} \text{ s}$ donc le milieu est électriquement neutre et $\rho = 0$ à tout instant.

L'équation de Maxwell Gauss devient $\vec{\text{div}}\vec{E} = 0$.

11. On utilise $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

$$\text{soit } \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E}$$

$$\text{soit } -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\Delta\vec{E}$$

$$\text{soit } \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma_0\vec{E}) = \Delta\vec{E}$$

$$\text{d'où } \Delta\vec{E} - \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Par identification avec l'énoncé on a $D = \frac{1}{\mu_0\gamma_0}$.

On reconnaît une équation de diffusion, D désigne le coefficient de diffusion en $m^2.s^{-1}$.

12. On remplace l'expression du champ électrique de l'onde dans l'équation de propagation:

$$\Delta \vec{E} = -\underline{k}_t^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

On obtient (après simplification par \vec{E}): $\underline{k}_t^2 = -i\frac{\omega}{D} = -i\omega\mu_0\gamma_0$.

13. On a donc $\underline{k}_t^2 = e^{-i\pi/2}\omega\mu_0\gamma_0$ d'où $\underline{k}_t = e^{-i\pi/4}\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}} - i\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}}$.

Par identification avec l'énoncé $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}} = -\beta$.

On note que le vecteur d'onde possède une partie réelle, donc il y a de la propagation.

Le vecteur d'onde a une partie imaginaire donc il y a de l'absorption.

14. On remplace l'expression de $\underline{k}_t = \alpha + i\beta$ dans l'expression du champ électrique complexe. On trouve le champ électrique réelle en prenant la partie réelle:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \alpha x - i\beta x)} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \alpha x)} e^{\beta x}.$$

Soit en prenant la partie réelle: $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - \alpha x) e^{\beta x}$.

On pose $\alpha = -\beta = \frac{1}{\delta}$ pour obtenir $\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \vec{e}_x$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$.

15. Le terme de phase $\omega t - x/\delta$ montre qu'il y a propagation.

Le terme $E_0 e^{-x/\delta}$ montre que l'amplitude de l'onde quand x augmente, soit l'amplitude de l'onde diminue quand l'onde avance.

16. δ s'appelle l'épaisseur de peau, c'est l'épaisseur sur laquelle l'onde pénètre dans le métal avant de s'annuler.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c^2}{\gamma_0 \pi f}} = 22 \mu m.$$

Les données bancaires sont bien protégées si la feuille d'aluminium a une épaisseur supérieure à $5\delta \approx 0,1 \text{ mm}$.