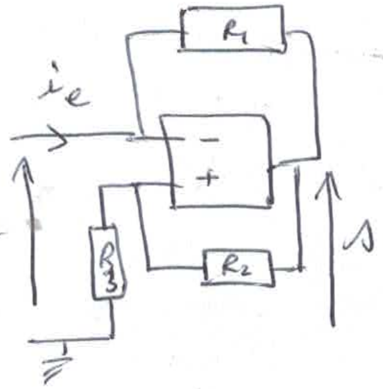
Montage à résistance négative

1)



Rétroaction négative $\Rightarrow$ fonctionnement en régime linéaire

$$v^+ = v^- = e$$

$$v^+ = \frac{\frac{0}{R_3} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_3}{R_3 + R_2} s$$

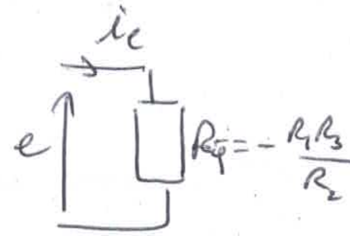
$$v^- = \frac{i_e + \frac{s}{R_1}}{\frac{1}{R_1}} = s + R_1 i_e$$

$\Rightarrow \frac{R_3}{R_3+R_2} s = s + R_1 i_e =$

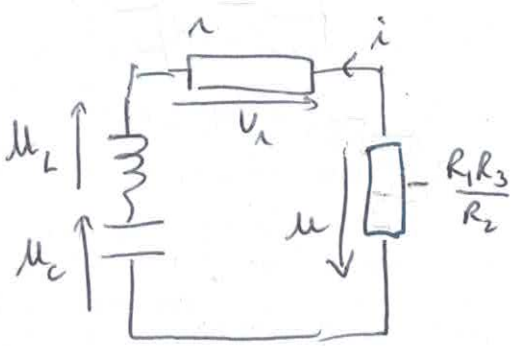
donc $s = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) e$ et $s + R_1 i_e = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) e + R_1 i_e = e$

d'où $\frac{R_2}{R_3} e + R_1 i_e = 0$

et $\boxed{e = -\frac{R_1 R_3}{R_2} i_e}$ ce montage est équivalent à une résistance négative



2) Circuit équivalent :



loi des mailles : $u_c + u_L + u_r + u = 0$

avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ $\quad i = C\frac{du_c}{dt}$

$$u_L = CL \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

$$u + u_r = \left(r - \frac{R_1 R_3}{R_2}\right) i = \left(r - \frac{R_1 R_3}{R_2}\right) C \frac{du_c}{dt}$$

d'où $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \left(r - \frac{R_1 R_3}{R_2}\right) C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$

soit $\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} - \frac{R_1 R_3}{R_2 L}\right) \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0}$

3) a et b _ Pour $r = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ on obtient l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}$

soit $\boxed{r = 10\,\Omega}$

on lit $T_0 = \frac{3{,}7}{3} = 1{,}23\text{ ms}$ soit $\boxed{C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L}} = 1{,}3\ \mu F$.

($L = 30\text{ mH}$ code ligne 13)

ligne 13 $\quad L, C = 30e-3, 1.3e-6$

ligne 14 $\quad r = 10$

ligne 19 $\quad \Big[\underbrace{U[1]}_{\frac{du_c}{dt}}, \underbrace{-U[0]/(L*c) - U[1]*\big(r/L - (R1*R_3/R_2/L)\big)}_{\frac{d^2u_c}{dt^2} = -\frac{u_c}{LC} - \frac{du_c}{dt}\left(\frac{r}{L} - \frac{R_1R_3}{R_2L}\right)}\Big]$

ligne 20 $\quad$ sol = odeint (eq, [1, 0], t) # $1 = U_c(0)$ et $0 = \frac{du_c}{dt}(0)$: C.I.

3) c- pour $R_3 < 10\,\Omega$ on a $r - \frac{R_1R_3}{R_2} > 0$

l'oscillateur est amorti : courbe de droite

les oscillations s'arrêtent rapidement car la résistance de la bobine l'emporte sur la résistance négative

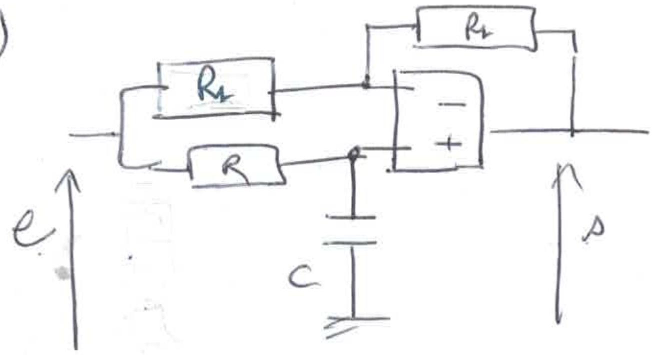
pour $R_3 > 10\,\Omega$ on a $r - \frac{R_1R_3}{R_2} < 0$

l'oscillateur est amplifié : courbe de gauche

les oscillations ont une amplitude de + en + grande, l'amplitude va saturer lorsque $s = 15V$ en sortie de l'ALi. L'énergie est apportée par l'alimentation de l'ALi.

Déphaseur

1)



Le circuit présente une rétroaction négative donc il peut fonctionner en régime linéaire, on étudie ce régime où $\underline{v}^+ = \underline{v}^-$

$$\underline{v}^+ = \frac{\frac{\underline{e}}{R} + \frac{0}{\underline{Z}_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_c}} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} \times \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}$$

$\underline{Z}_c = 1/jc\omega$

$$\underline{v}^- = \frac{\frac{\underline{e}}{R_1} + \frac{\underline{s}}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2}$$

On applique $\underline{v}^+ = \underline{v}^-$ soit : $\frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} \Rightarrow 2\underline{e} = (1 + jRC\omega)(\underline{e} + \underline{s})$

soit $\underline{e}\,(2 - 1 - jRC\omega) = \underline{s}\,(1 + jRC\omega)$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

$|\underline{H}| = 1$

$$\arg \underline{H} = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$$
$$= 2 \arg(1 - jRC\omega)$$
$$= 2 \arctan(-RC\omega)$$
$$\varphi = -2\arctan(RC\omega) < 0$$

2) Circuit déphaseur : s et e ont toujours la même amplitude et sont déphasés l'un par rapport à l'autre ; s est toujours en retard / à e

$\boxed{s(t) = E\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\varphi = -2\arctan(RC\omega)}$

3) On mesure $2T = 5$ ms soit $T = 2{,}5$ ms et $\boxed{f = \frac{1}{T} = 400 \text{ Hz}}$

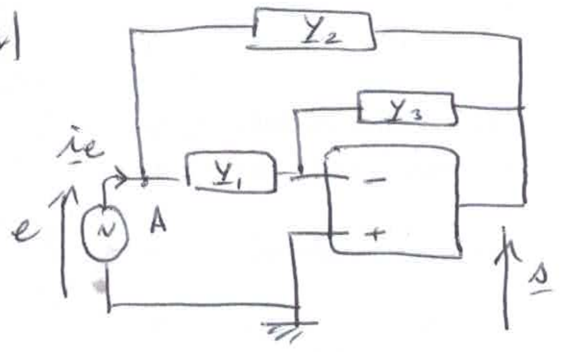
s(t) est en retard / à e(t) : $\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T} = -2\pi \frac{0{,}65}{4{,}4} = -0{,}93$ rad

e(t) a une amplitude $\boxed{E = 2V}$

$$-\tan\frac{\varphi}{2} = RC\omega \Rightarrow C = -\frac{1}{R\omega}\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\boxed{C = 1.10^{-7}F}$$

Simulateur d'inductance

1) 

l'ALi fonctionne en régime linéaire car il présente une rétroaction négative.

$$\left.\begin{aligned} V^+ &= 0 \\ V^- &= \frac{e \times Y_1 + s \times Y_3}{Y_1 + Y_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V^- &= V^+ \\ s &= -\frac{Y_1}{Y_3} e \end{aligned}$$

Millman en A donc : $e = \dfrac{i_e + V^- \times Y_1 + s \times Y_2}{Y_1 + Y_2}$ avec $V^- = V^+ = 0$

$$s = -\frac{Y_1}{Y_3} e$$

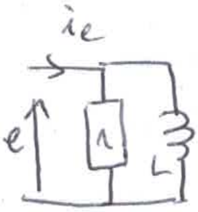
d'où $(Y_1 + Y_2)\, e = i_e - \dfrac{Y_1 Y_2}{Y_3} e$

soit $\left(Y_1 + Y_2 + \dfrac{Y_1 Y_2}{Y_3}\right) e = i_e$

$$\boxed{Y_e = \frac{i_e}{e} = Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3}}$$

2) $Y_1 = \dfrac{1}{R_1}$ $\quad Y_2 = \dfrac{1}{R_2}$ $\quad Y_3 = jC\omega$

$$Y_e = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jR_1R_2C\omega}$$



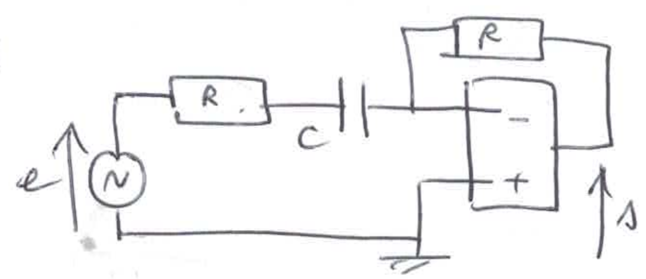
$$i_e = (Y_r + Y_L)\, e = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jL\omega}\right) e$$

par identification : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ soit $\boxed{r = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$

$$\frac{1}{R_1R_2C\omega} = \frac{1}{L\omega} \text{ soit } \boxed{L = R_1R_2C}$$

Filtre

1)



l'ALi fonctionne en régime linéaire car il y a une rétroaction négative.

$\underline{V}^+ = \underline{V}^-$

avec $\underline{V}^+ = 0$ et $\underline{V}^- = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{R + 1/jc\omega} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{1}{R + 1/jc\omega} + \dfrac{1}{R}} = 0$

soit $\underline{e}\,\dfrac{-jc\omega R}{1 + jRC\omega} = \underline{s}$ soit $\boxed{\underline{H} = \dfrac{-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{RC}}$

Filtre passe-haut

2) asymptotes

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \simeq -1$ $\quad G_{dB} = 0$ dB et $\varphi = \arg \underline{H} = \pi$ ou $-\pi$

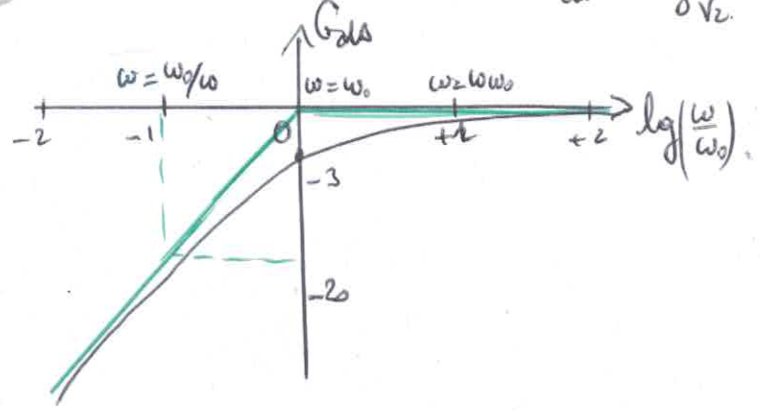
$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} = -j\dfrac{\omega}{\omega_0}$ $\quad G_{dB} = 20 \lg\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ et $\varphi = \arg \underline{H} = -\dfrac{\pi}{2}$

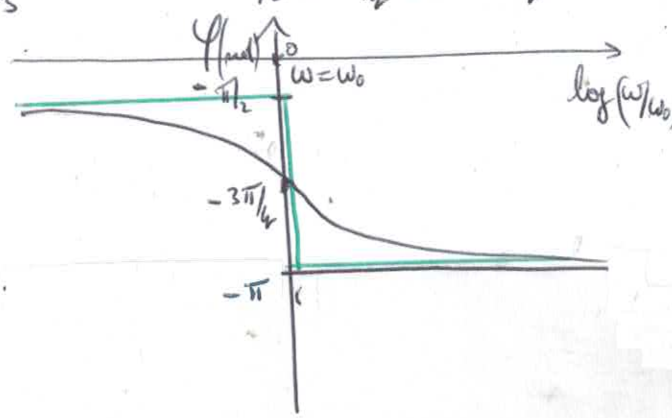
asymptote oblique de pente + 20 dB/décade

point réel

Pour $\omega = \omega_0$: $\underline{H} = \dfrac{-j}{1+j}$ $\quad |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi = \arg \underline{H} = \arg(-j) - \arg(1+j)$

$G_{dB} = 20 \lg \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -3$ $\quad = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$





3) $e(t) = 2 + 3\cos(\omega_0 t) + 4\cos(2\omega_0 t)$

compo. cont. de fréquence nulle

$\underline{H}(0) = 0$

$\underline{H}(\omega_0) = \dfrac{-j}{1+j}$ $\quad |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi = -3\pi/4$

pour $e_1 = 3\cos(\omega_0 t)$

$s_1 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - 3\pi/4)$

$\underline{H}(2\omega_0) = \frac{-j2}{1+2j}$ $|\underline{H}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\arg \underline{H} = \arg(-2j) - \arg(1+2j)$

$= -\pi/2 - \arctan(2) = -2{,}7 \text{ rad}$

pour $e_2(t) = 4\cos(2\omega_0 t)$

$s_2(t) = \frac{4 \times 2}{\sqrt{5}} \cos(2\omega_0 t - 2{,}7)$

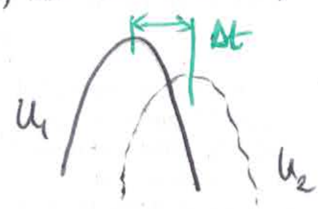
d'où $\boxed{s(t) = 0 + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - 3\pi/4) + \frac{8}{\sqrt{5}} \cos(2\omega_0 t - 2{,}7)}$

Dipôle inconnu

1) $\boxed{U_{1m} = 3V}$ (amplitude) $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $2T = 40\,ms$ soit $\boxed{\omega = 314 \text{ rad.s}^{-1}}$

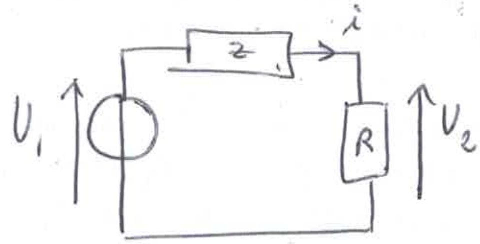
2) $u_2(t)$ admet son maximum après $U_1(t)$ donc $U_2(t)$ est en retard / à U_1

$\varphi_{2/1} = -2\pi \frac{\Delta t}{T}$ où $\Delta t \simeq 2\,ms$



$\boxed{\varphi_{2/1} = -0{,}62 \text{ rad}}$

$U_2(t) = R\, i(t)$



donc $\boxed{i \text{ est en retard / à } U_1}$

aux bornes d'une bobine $\underline{u} = jL\omega \underline{i}$

soit $\arg(\underline{u}) = \arg(j) + \arg(\underline{i})$

$\arg(\underline{u}) - \arg(\underline{i}) = \arg(j) = \pi/2 > 0$

dans une bobine u est en avance sur i comme dans ce montage où V_1 est en avance sur i d'où le nom de circuit inductif

3) On a : $\underline{u}_2 = \frac{R}{R+\underline{Z}} \underline{u}_1$ d'après le diviseur de tension

soit $\underline{u}_2 = \frac{R}{R+X+jY} \underline{u}_1$

on prend le module pour avoir l'amplitude : $\boxed{\underbrace{|\underline{u}_2|}_{u_{2m} = 1{,}9V} = \frac{R}{\sqrt{(R+X)^2 + Y^2}} \underbrace{|\underline{u}_1|}_{u_{1m} = 3V}}$

on prend l'argument pour avoir le déphasage : $\arg \underline{u}_2 = \underbrace{\arg(R)}_{0} + \arg(\underline{u}_1) - \arg(R+X+jY)$

$\varphi_{2/1} = \arg(\underline{u}_2) - \arg(\underline{u}_1) = -\arg(R+X+jY) = -\arctan\left(\frac{Y}{R+X}\right)$

soit $\boxed{\tan(-\varphi_{2/1}) = \frac{Y}{R+X}}$

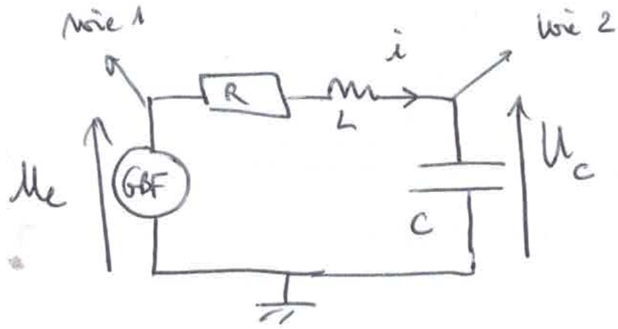
On résout le système :

$$\begin{cases} \dfrac{U_{2m}}{U_{1m}} = \dfrac{R}{\sqrt{(R+X)^2 + Y^2}} \\[2ex] \tan(-\varphi_{2/1}) = \dfrac{Y}{R+X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{U_{2m}}{U_{1m}} = \dfrac{R}{\sqrt{(R+X)^2 \left(1 + \tan^2(-\varphi_{2/1})\right)}} \\[2ex] Y = (R+X)\tan(-\varphi_{2/1}) \end{cases}$$

$$\text{soit} \begin{cases} R+X = \dfrac{R\, U_{1m}}{U_{2m}\sqrt{1+\tan^2(-\varphi_{2/1})}} = \dfrac{R\, U_{1m} \cos(-\varphi_{2/1})}{U_{2m}} = 192\,\Omega \quad \boxed{X = 42\,\Omega} \\[2ex] \boxed{Y = (R+X)\tan(-\varphi_{2/1}) = 137\,\Omega} \end{cases}$$

Circuit RLC série

1)



$u_c(t)$ de la forme : $U_{cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$

On trouvera U_{cm} et φ_u en faisant

$U_{cm} = |\underline{u}_c|$ et $\varphi_u = \arg(\underline{u}_c)$

Pont diviseur de tension : $\underline{u}_c = \dfrac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega}\,\underline{u}_e = \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\,\underline{u}_e$

$$U_{cm} = |\underline{u}_c| = \frac{\overbrace{|\underline{u}_e|}^{=U_0}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} = 7{,}7\ \mathrm{V} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

$$\varphi_u = \arg \underline{u}_c = \underbrace{\arg(\underline{u}_e)}_{0} - \arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = -0{,}96\ \mathrm{rad}$$

d'où $\boxed{u_c(t) = 7{,}7\cos(\omega t - 0{,}96)}$

De même $i(t)$ de la forme : $I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$

avec $\underline{i} = jC\omega\,\underline{u}_c$ soit $I_m = |\underline{i}| = C\omega|\underline{u}_c| = C\omega U_{cm} = 24\ \mathrm{mA}$

soit $\varphi_i = \arg(\underline{i}) = \arg(jC\omega) + \arg(\underline{u}_c) = \frac{\pi}{2} + \varphi_u = 0{,}61\ \mathrm{rad}$

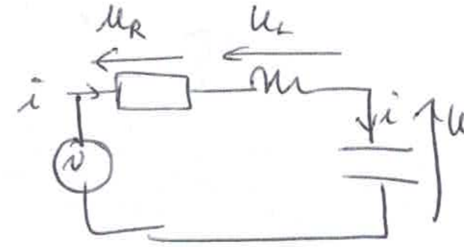
soit $\boxed{i(t) = 24\cos(\omega t + 0{,}61)\ (\text{en mA})}$

2) $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}_e}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$ soit $\boxed{I_m = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

L'amplitude de $i(t)$ dépend de ω, on parle de résonance lorsque l'amplitude est maximale soit pour I_m maximale, ce qui se produit ici pour $R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale puisque le numérateur est constant.

Et $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2$ est minimal pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ soit $\boxed{\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

Soit $\boxed{C = \frac{1}{\omega_1^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = 1{,}98\ \mu F}$



à résonance : $\boxed{I_m = \frac{U_0}{R}} = 29\ mA$

$\underline{u}_R = R\,\underline{i}$ donc $\boxed{u_{Rm} = R\,I_m = 5V}$

$\underline{u}_L = jL\omega\,\underline{i}$ donc $\boxed{U_{Lm} = L\omega\,I_m} = 5{,}83\,V$

$\underline{u}_c = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$ donc $\boxed{u_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega}} = 5{,}83\,V$

3) Pont diviseur de tension : $\underline{u}_C = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega}\,\underline{u}_e$

soit $\underline{H} = \frac{\underline{u}_c}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ par identification : $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

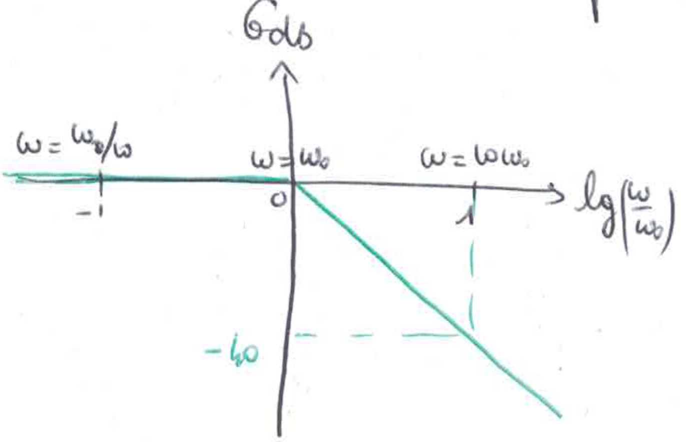
$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

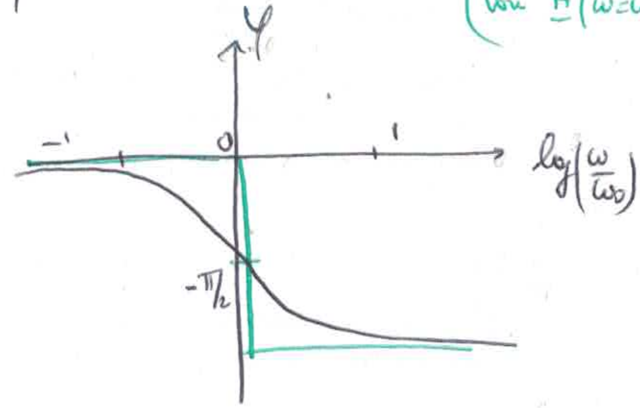
$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} = 1$ $\quad G_{dB} = 20 \lg |\underline{H}| = 0$ $\quad \varphi = \arg \underline{H} = 0$

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ $\quad G_{dB} = +40 \lg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -40 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $\quad \varphi = \arg(\underline{H}) = \pi$ ou $-\pi$

pente -40 dB/décade

car $\varphi < 0$ (voir $\underline{H}(\omega = \omega_0)$)





$\underline{H}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{Q}{j}$ $\quad G_{dB} = 20 \lg Q$ $\quad \varphi = \arg(\underline{H}) = \underbrace{\arg Q}_{0} - \arg j = -\pi/2$

$$U_{Cm} = |\underline{u}_c| = \frac{|\underline{u}_e| = U_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

A la résonance, U_{Cm} est maximale soit le dénominateur est minimal

on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ ($f(x)$ est la fonction sous la racine carrée au dénominateur)

on cherche le minimum de $f(x)$ soit :

$$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$= 2x\left[-2 + 2x^2 + \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$= 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \boxed{x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$$

la résonance en tension est possible

pour $\frac{1}{2Q^2} < 1$. soit $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ dans ce

cas $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ soit la pulsation

de résonance est $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$