

# PARTIE PHYSIQUE

## Le système GPS

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

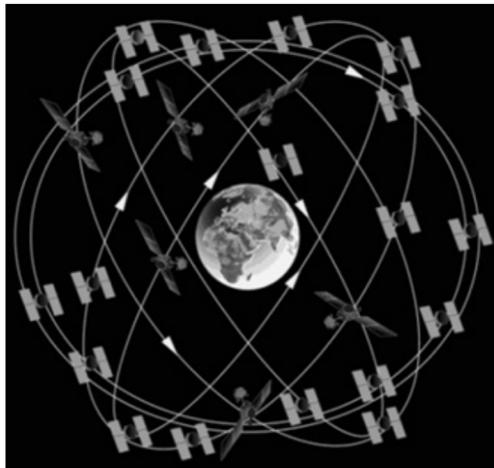


FIGURE 1 – Constellation satellite GPS

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.  
Vu sur le site <https://www.maanmittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Le système fut mis en place par le département de la Défense des États-Unis à partir de 1973, à l'origine, uniquement à des fins militaires. Avec ses vingt-quatre satellites, il est devenu totalement opérationnel en 1995. Le 2 mai 2000, le président étatsunien Bill Clinton confirme l'intérêt de la technologie à des fins civiles et autorise une diffusion non restreinte des signaux GPS, permettant une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres et une démocratisation de la technologie au grand public à partir du milieu des années 2000. De nos jours les récepteurs GPS se sont banalisés et ont envahi notre environnement quotidien (automobile, smartphones, montre connectée, etc).

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de  $2,00 \times 10^4$  km (voir figure 1). Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de  $55^\circ$  par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de  $60^\circ$ . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant «  $t$  ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles. Sur la photo de la figure 2 prise lors de la phase finale d'assemblage, on peut se faire une idée des dimensions d'un satellite NAVSTAR munis de ses panneaux solaires en le comparant à la personne située à ses côtés.

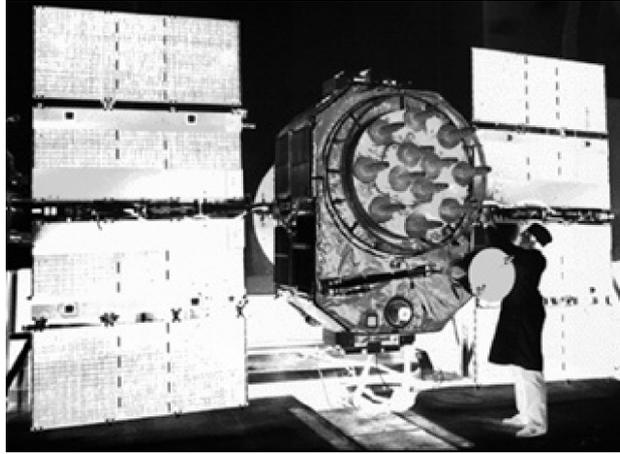


FIGURE 2 – Satellite NAVSTAR

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.  
Vu sur le site <https://www.maamittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

## A/ Trajectoires de satellites

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. Les données nécessaires sont regroupées en annexe à la fin de l'énoncé.

**Q1** - Rappeler l'expression de la force de gravitation  $\vec{F}$  exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en  $O$ . On notera  $r$  la distance  $OM$  du satellite (masse ponctuelle  $m$ ) placé au point  $M$ ,  $r > R_T$  où  $R_T$  est le rayon terrestre. On exprimera  $\vec{F}$  en fonction de la constante de gravitation universelle  $G$ , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement  $\vec{u}_r$  en coordonnées sphériques (figure 3).

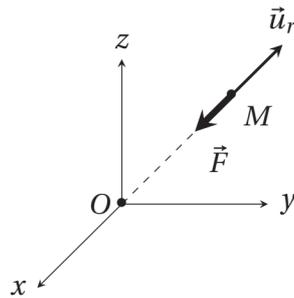


FIGURE 3 – Repère sphérique

**Q2** - En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que :

- sa trajectoire est plane;
- son énergie mécanique notée  $E_m$  est conservée;
- et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de  $m$ ,  $M_T$ ,  $G$  et de la constante des aires  $C$ . L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

**Q3** - Soit la fonction  $E_{p \text{ eff}}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$ . Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum noté  $r_0$ . Exprimer  $r_0$  en fonction de  $A$  et  $B$  puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail. Comment est habituellement dénommée cette fonction  $E_{p \text{ eff}}(r)$  ?

*On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.*

**Q4** - Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

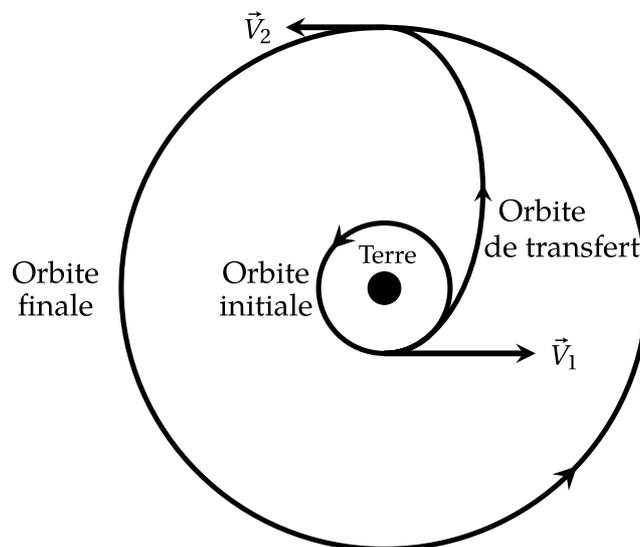


FIGURE 4 – Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 4) :

**Phase 1** : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon  $R_1 = R_T + h_1$ , où  $h_1 = 1,50 \times 10^3$  km.

**Phase 2** : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse  $V_1$  après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.

**Phase 3** : une seconde impulsion permet d'atteindre l'orbite finale supposée circulaire de rayon  $R_2$  où la vitesse du satellite est  $V_2$ .

**Q5** - Donner sans démonstration l'expression de l'énergie mécanique  $E_{m1}$  d'un satellite NAVSTAR de masse  $m = 800$  kg sur son orbite basse à l'altitude  $h_1 = 1,50 \times 10^3$  km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

**Q6** - Comparer  $E_{m1}$  à  $E_{m0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$ , énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude  $\lambda$ . Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $\alpha = 8,6 \times 10^7$  J et  $\beta = 5,006 \times 10^{10}$  J. Quelle est la valeur optimale pour  $\lambda$  ? Faire l'application

numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

**Q7** - À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon  $r$ , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon  $r$  la valeur du demi-grand axe  $a$  de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique  $E_{m12}$  sur l'orbite de transfert.

*On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.*

**Q8** - En déduire la variation de vitesse  $\Delta V_1$  à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

**Q9** - Quelle est la durée du transfert? (*La troisième loi de Kepler est rappelée en annexe.*)

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

**Q10** - Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.

**Q11** - Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS? Expliciter votre réponse.

## Annexe

### Constantes fondamentales :

Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge élémentaire :	$e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de gravitation universelle :	$G = 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ USI}$

### Formulaire :

Masse de la Terre :	$M_T = 5,9722 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon terrestre :	$R_T = 6,371 \times 10^3 \text{ km}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

### Troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T},$$

où  $T$  est la période révolution et  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse.

### Opérateurs différentiels :

$$\text{rôt}(\text{rôt } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

### Développements limités :

$$\sqrt{1-\epsilon} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$