E3A PC 2020

1) $\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m M_T}{r^2}\vec{e_r}$

2) a. TMC appliqué au satellite par rapport au centre O de la Terre.

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ (force centrale) d'où } \vec{L_o}(M) \text{ est un vecteur constant.}$$

$\vec{L_o}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ est un vecteur $\perp$ à $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$ donc $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$ sont $\perp$ à un vecteur constant donc le mvt de M est contenu dans le plan passant par O et $\perp$ à $\vec{L_o}(M)$.

b. La force $\vec{F}$ est conservative, d'énergie potentielle $E_p = -\mathcal{G}\dfrac{m M_T}{r}$ donc le système est conservatif, l'énergie mécanique est conservée.

c. Le mvt est plan, on travaille en coord. polaires : $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

d'où $\vec{L_o}(M) = m r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$. La norme de ce vecteur est constante

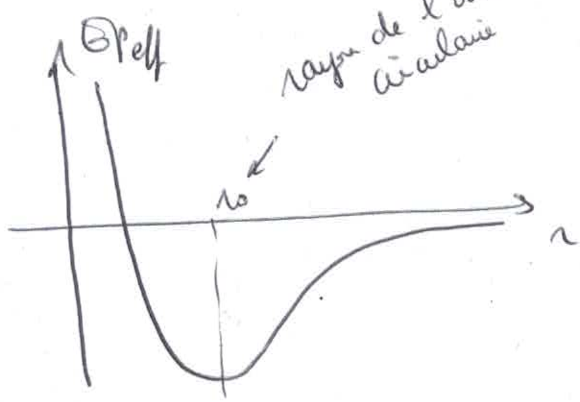
donc $C = r^2\dot{\theta}$ est constante.

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \mathcal{G}\frac{m M_T}{r}$$

$$\boxed{E_m = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{m M_T}{r}}$$

par identification : $\boxed{B = \dfrac{mC^2}{2}}$ et $\boxed{A = \mathcal{G} m M_T}$

3)



$$\frac{dE_{peff}}{dr} = \frac{A}{r^2} - \frac{B2}{r^3} = 0 \text{ pour } \frac{2B}{r_0^3} = \frac{A}{r_0^2}$$

soit $\boxed{r_0 = \dfrac{2B}{A}}$ ou $\boxed{r_0 = \dfrac{4\mathcal{G}M_T}{C}}$

E_{peff} s'appelle l'énergie potentielle effective ou efficace

$r_0 = 2{,}64.10^4$ km pour le satellite en orbite circulaire :
(altitude $2{,}0.10^4$ km donnée dans l'énoncé)

4) En appliquant la loi de Kepler : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM_T}}} = 4{,}26.10^4\,s = 11h\,50\,min$

Le satellite fait donc deux fois le tour de la Terre pendant un jour sidéral

5) $E_{m_1} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_T}{R_T+h_1}$ avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h_1}}$ (en appliquant la RFD : $m\left(-\frac{v^2}{r}\right) = -G\frac{mM_T}{r^2}$

soit $\boxed{E_m = -G\frac{mM_T}{2(R_T+h_1)}} = -2{,}02.10^{10}\,J$ soit $v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$)

6) $E_{m_0} = \alpha\cos^2\lambda - \beta$ est comprise entre $E_{m0\,min} = -\beta = -5{,}006.10^{10}\,J$ pour $\lambda = \pi/2$ aux pôles nord et sud

et $E_{m0\,max} = \alpha - \beta = -5{,}00.10^{10}\,J$ à l'équateur pour $\lambda = 0$.

Il vaut mieux faire décoller le satellite depuis l'équateur, il faut lui fournir l'énergie $-2{,}02.10^{10} - (-5.10^{10}) = 3{,}08.10^{10}\,J$ pour le mettre en orbite.

7) Sur l'orbite elliptique : $\boxed{E_{m_{12}} = -G\frac{mM_T}{2a}} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_T}{r}$

8) pour $r = R_T+h_1$ et $v = v_0$ (sur l'orbite elliptique au point de départ)

on a : $-G\frac{M_T}{2a} = \frac{v_0^2}{2} - G\frac{M_T}{R_T+h_1}$

soit $\boxed{v_0 = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T+h_1} - \frac{1}{2a}\right)}}$ avec $2a = \underbrace{R_T+h_1}_{\text{rayon de l'orbite basse}} + \underbrace{r_0}_{\text{rayon de l'orbite haute}}$

avec $\boxed{v_{0\,circ} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}}$

d'où la variation de vitesse : $\boxed{\Delta v = v_0 - v_{0\,circ}} = 1{,}70\,km\,s^{-1}$

9)

le transfert dure une demi-période

$\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} = \pi\sqrt{\frac{(r_0+R_T+h_1)^3}{8GM_T}}} = 1{,}12.10^4$

10) Satellite géostationnaire : sa période est celle de la Terre

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} \quad \text{soit} \quad R^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$$

d'où $\boxed{R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$ avec $T = 24\ h = 24 \times 3600\ s$

d'où $\underline{R = 42{,}4.10^3\ km}$

$\underline{h = 36.10^3\ km}$

11) Les satellites géostationnaires se trouvent tous dans le plan de l'équateur donc c'est compliqué pour que tous les points de la Terre puissent être en contact avec 4 satellites.