CCINP Physique PC 2021
De la physique dans le vivant
Proposition de corrigé

Ce corrigé à été rédigé par Marie THOREY et David LASNE. N'hésitez pas à nous signaler par mail (thoreymarie@aol.com ou david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves.

Partie I - Le gecko

I.1 - Interactions entre molécules polaires

Q1. La polarité des molécule vient essentiellement des différences d'électronégativités entre les atomes. Dans HCl, le chlore étant plus électronégatif, il déforme le nuage électronique en attirant les électrons vers lui. Il en résulte une charge négative sur Cl et une charge positive sur H, donc un moment dipolaire (orienté de Cl vers H).
Par définition du moment dipolaire, on a ici $\boxed{\vec{p_1} = qa\vec{u_z}}$.

Q2. D'après le principe de superposition, le potentiel électrostatique total est la somme de celui créé par la charge en P et celui créé par celle en N. D'après la formule de COULOMB, on a :

$$V_1(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM}$$

Or dans l'approximation dipolaire, $a \ll r$ donc on peut écrire, au premier ordre en $\frac{a}{r}$:

$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta \simeq r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta$$

Toujours au premier ordre, on en déduit : $PM = \sqrt{r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta} \simeq r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$
De même : $NM \simeq r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$. On a alors :

$$V_1(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{V_1(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{a}{r}\cos\theta = \frac{p_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Q3. D'après le cours, $\vec{E}_1(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V_1(M)$, donc avec le formulaire de l'énoncé :

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\partial V_1}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\theta}\vec{u_\theta}$$

On obtient donc : $\boxed{\vec{E_1}(M) = +\frac{p_1\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{p_1\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_\theta}}$ qui correspond au résultat attendu.

Q4. Deux possibilités de raisonnement :
- Avec le couple $\Gamma = -p_2E_1(M)\sin\alpha$ par rapport à l'axe de rotation. A l'équilibre, ce couple est nul, donc les positions d'équilibre sont en $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Or si on perturbe le système d'un petit angle $\varepsilon > 0$ au voisinage de $\alpha = 0$, le couple est négatif et ramène donc le dipôle vers la position d'équilibre $\alpha = 0$ qui est donc stable. Par contre, au voisinage de $\alpha = \pi$, $\Gamma = -p_2E_1(M)\sin(\pi + \varepsilon) = +p_2E_1(M)\sin\varepsilon > 0$: le couple entraine le dipôle encore plus loin, cet équilibre est instable.
- Par l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{12} = -\frac{p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\alpha$. Si on trace $\mathscr{E}_{12}$ en fonction de α, on constate aisément que le minimum est en $\alpha = 0$ qui correspond donc à une position d'équilibre stable.

Dans tous les cas, le couple tend à aligner les 2 dipôles (position $\alpha = 0$).

Q5. Pour $\alpha = 0$, on a $\mathscr{E}_{12} = -\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$.
Application numérique : $\mathscr{E}_{12} = -1{,}6.10^{-21}$ J et $k_BT = 4{,}0.10^{-21}$ J
L'énergie d'agitation thermique est suffisante pour que les dipôles soient mobiles et ne restent pas alignés en permanence.

Q6. *Application numérique :* $C_K \sim 10^{-77}$ J.m^6.
La force correspondante est $\boxed{\vec{F_{12}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\langle\mathscr{E}_{12}\rangle = -\frac{6C_K}{r^7}\vec{u_r}}$. Cette force est orientée selon $-\vec{u_r}$ donc elle est attractive.

Q7. Une force surfacique est une pression, donc $A = 6\pi D^3.f(D)$ est une pression multipliée par un volume : c'est donc bien une énergie (cf $H = U + PV$ par exemple).

Q8. On applique le principe fondamental de la statique au gecko, soumis à son poids et à force d'adhérence. Cette dernière doit donc (en norme) compenser le poids. Si on note x le pourcentage de sétules utilisées, $N = 500 \times 6.10^6$ le nombre total de sétules et $S = \ell^2$ la surface de contact, on peut écrire :

$$mg = xN.\frac{A}{6\pi D^3}\ell^2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{mg}{N\frac{A}{6\pi D^3}\ell^2}}}$$

Application numérique : $x = 8.10^{-4} = 0,08\%$
On obtient le bon ordre de grandeur, ce qui pourrait valider l'hypothèse. Mais il manque un facteur 2 : si le gecko n'utilise que 0,04% de ses sétules, notre calcul semble montrer qu'il ne supporterait pas son poids. Il y a donc sans doute un autre effet (mais le calcul est assez approximatif). Qu'est-ce qui était attendu dans cette fin de question ?...

Q9. Le mouvement se décompose en 2 phases :

— La première phase est une chute libre sur une hauteur $h = 10$ cm. En négligeant les frottements de l'air, on peut exploiter la conservation de l'énergie mécanique entre le moment du lâcher (sans vitesse initiale) et le moment où le gecko se rattrape, ce qui donne la vitesse atteinte au début du freinage :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_f = 0 + mgz_i \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_0 = \sqrt{2gh}}}$$

— Durant la phase de freinage, on peut reprendre le même principe, mais l'énergie mécanique n'est plus conservée. Le travail de la force d'adhérence (de norme $F = 5$ N si le gecko n'utilise que la moitié de l'adhérence maximale) s'écrit $W = -Fd$ où d est la distance de "freinage". On a donc :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 - mgd = -Fd \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d = \frac{mv_0^2}{2(F-mg)} = \frac{mgh}{F-mg}}}$$

Application numérique : $d \simeq 11$ cm.

Q10. La norme de $\vec{j}_{th}$ est une puissance transférée par unité de surface (en W.m^{-2}).

Q11. La loi de FOURIER s'écrit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{j}_{th} = -\lambda\overrightarrow{\mathbf{grad}T}}}$ ce qui donne directement, avec le formulaire et pour un transfert purement radial, la relation voulue. Le signe moins de cette loi empirique s'explique car le gradient est orienté des basses températures vers les hautes températures, mais le flux thermique va naturellement des zones chaudes vers les zones froides.

Q12. On effectue, comme le suggère l'énoncé, un bilan thermique entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, pour un système constitué par un cylindre creux de hauteur ℓ, compris entre les rayons ρ et $\rho + \mathrm{d}\rho$. D'après le premier principe :

$$\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \delta Q_e + \delta Q_c + \delta W$$

Le cylindre est indéformable donc $W = 0$ et il n'y a pas de terme source (pas de métabolisme) donc $\delta Q_c = 0$. De plus, on est en régime stationnaire donc $\mathrm{d}U = 0$ par définition.
Le terme d'échange peut se décomposer en 2 termes :

$$0 = \delta Q_e = \delta Q_{\text{entrant en } \rho} - \delta Q_{\text{sortant en } \rho+\mathrm{d}\rho}$$

On en déduit que le flux thermique est le même en ρ et en $\rho + \mathrm{d}\rho$, c'est-à-dire qu'il est constant. On peut donc écrire :

$$2\pi\rho\ell \times (-\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}) = \Phi_0$$

Ceci se résume donc, en passant toutes les constantes à droite, à $\rho\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho} = A$ où A est une constante.
Par intégration (en passant ρ à droite), on obtient la forme du profil de température :

$$T(\rho) = A\ln\rho + B$$

On trouve les constantes A et B au moyen de 2 conditions aux limites en R_1 et R_2 :

$$\begin{cases} A\ln R_1 + B = T_1 \\ A\ln R_2 + B = T_2 \end{cases}$$

En soustrayant ligne à ligne, il vient $A = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}$. En reprenant la première ligne, on trouve $B = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}\ln R_1$ et donc on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}\ln\frac{\rho}{R_1} + T_1}}$$

Q13. Par définition, $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to 2}}$ où $\Phi_{1\to 2}$ est le flux thermique allant de 1 vers 2. Ici :

$$\Phi_{1\to 2} = \Phi_0 = -2\pi\rho\ell\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho} = -2\pi\rho h\lambda\frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}\frac{1}{\rho}$$

On identifie donc, après simplification, $\boxed{\boldsymbol{R_{th} = \dfrac{1}{2\pi\ell\lambda}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$.

Q14. Si le cylindre est homogène, $m = \rho_e \times \pi R^2 \ell \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{R = \sqrt{\dfrac{m}{\pi\rho_e\ell}}}}$.

Application numérique : $R \simeq 9$ cm ce qui est cohérent.

Q15. On reprend un bilan thermique (premier principe), mais cette fois pour un manchot dans son ensemble. En régime stationnaire, on a toujours $\mathrm{d}U = 0$ et on néglige tout travail. On a donc $\delta Q_e + \delta Q_c = 0$. Or $\delta Q_e = -\Phi_{th}\mathrm{d}t$ (flux sortant) et $\delta Q_c = \mathscr{P}_m \mathrm{d}t$ donc $\boxed{\boldsymbol{\Phi_{th} = \mathscr{P}_m}}$.

Q16. Le flux thermique sortant traverse successivement les différentes couches qui sont donc en série. On peut donc sommer les résistances (qualitativement, les couches se superposent et la résistance thermique augmente d'autant). Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{R_{th,1} = \frac{1}{2\pi\ell}\left[\frac{1}{\lambda_g}\ln\frac{R+e_g}{R} + \frac{1}{\lambda_a}\ln\frac{R+e_g+e_a}{R+e_g} + \frac{1}{\lambda_p}\ln\frac{R+e_g+e_a+e_p}{R+e_g+e_a}\right]}}$$

Application numérique : $R_{th,1} = 1{,}07$ K.W^{-1}.

Q17. Le flux conducto-convectif est l'intégrale de $\vec{j}_{th,cc}$ sur la surface d'aire S, soit $\Phi_{th,cc} = Sh(T_p - T_e)$. D'après la définition de la résistance thermique, on a donc $\boxed{\boldsymbol{R_{th,cc} = \dfrac{1}{hS}}}$.

Q18. Un raisonnement identique amène à $\boxed{\boldsymbol{R_r = \dfrac{1}{4\sigma T_e^3 S}}}$.

Q19. Les pertes par flux conducto-convectif et par rayonnement se cumulent, pour un même écart de température entre le plumage et l'extérieur. Les résistances thermiques sont donc en parallèle (en dérivation) et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{R_{th,2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{th,cc}} + \frac{1}{R_r}} = \frac{1}{hS + 4\sigma T_e^3 S}}}$$

Application numérique : $R_{th,2} = 0{,}03$ K.W^{-1} en prenant pour S la surface latérale du cylindre de hauteur ℓ et de rayon $R + e_g + e_a + e_p$.

Q20. A nouveau, le flux traversant $R_{th,2}$ est celui ayant traversé toutes les couches internes, donc $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$ sont en série, ce qui donne $\boxed{\boldsymbol{R_{th,tot} = R_{th,1} + R_{th,2}}}$.

Application numérique : $R_{th,tot} = 1{,}10$ K.W^{-1}.

On en déduit $\mathscr{P}_m = \Phi_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{th,tot}}$.

Application numérique : $\mathscr{P}_m = 50$ W, en accord avec l'énoncé.

Q21. Tout d'abord, on constate que la puissance $\mathscr{P}_m$ a été un peu sous-estimée, même si l'ordre de grandeur est le bon (85 W pour un individu isolé).

Par ailleurs, le fait que les manchots se regroupent tend à faire baisser leurs besoins énergétiques (on parle de thermorégulation sociale) : d'après le tableau, plus le groupe est important, plus la puissance due au métabolisme nécessaire à maintenir leur température corporelle est faible. Ceci s'explique physiquement en considérant que lorsque le groupe s'agrandit, le nombre de manchots à la périphérie (donc la surface de contact avec l'extérieur, et donc le flux thermique perdu) croit moins vite que le nombre de manchots total (donc que la puissance produite).

Schématiquement, on peut considérer que seuls les manchots à la périphérie sont au contact du froid, les autres étant protégés et ont donc peu de besoins énergétiques. Plus précisément, leur métabolisme sert à réchauffer leurs voisins et n'est pas perdu à l'extérieur du groupe.

Partie III - La feuille de lotus

III.1 - Mesure d'une tension superficielle

Q22. D'après le théorème de PYTHAGORE, on a $R^2 = a^2 + (b-R)^2$, d'où $R^2 = a^2 + b^2 + R^2 - 2Rb$ et $\boxed{\boldsymbol{R = \dfrac{a^2+b^2}{2b}}}$.

Q23. D'après l'équation barométrique dans le manomètre (fluide incompressible), $\boxed{\boldsymbol{\Delta P = \rho_e g h}}$.

Q24. En utilisant la loi de LAPLACE, on a $\rho_e g h = \dfrac{4\gamma}{R}$, d'où $\gamma = \dfrac{R\rho_e g h}{4}$.

On obtient finalement $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \dfrac{(a^2+b^2)\rho_e g h}{8b}}}$.

Application numérique : $\gamma = 0{,}028$ N.m^{-1}

Le savon étant un tensioactif, il est normal que sa tension superficielle soit inférieure à celle de l'eau.

III.2 - Mesure d'un angle de contact

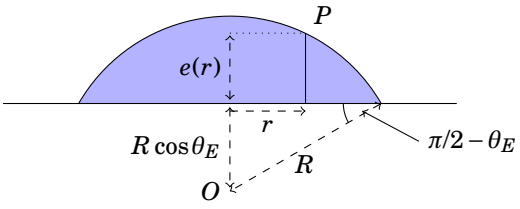
Q25. L'intensité est la même sur les franges, avec la même différence de marche, donc la même épaisseur. C'est pour cela que l'on parle de franges d'égale épaisseur. Comme l'intensité ne dépend que de r, les franges sont circulaires.

Q26. On peut projeter les franges sur un écran en utilisant une lentille convergente et en conjuguant l'écran et le plan du substrat.

Q27.

D'après le théorème de PYTHAGORE, sachant que $OP = R$, on a $R^2 = r^2 + (e(r) + R\cos\theta_E)^2$, d'où $e(r) + R\cos\theta_E = \sqrt{R^2 - r^2}$ et

$$\boxed{\boldsymbol{e(r) = \sqrt{R^2 - r^2} - R\cos\theta_E}}$$



Q28. Par ailleurs, on a $\dfrac{d}{2} = R\sin\theta_E$, d'où $R \simeq \dfrac{d}{2\theta_E}$. On en déduit que $e(r) = \sqrt{\dfrac{d^2}{4\theta_E^2} - r^2} - \dfrac{d}{2\theta_E}\left(1 - \dfrac{\theta_E^2}{2}\right)$.

Comme $\theta_E \ll 1$, on a $\dfrac{d}{2\theta_E} \gg r$, donc $\sqrt{\dfrac{d^2}{4\theta_E^2} - r^2} \simeq \dfrac{d}{2\theta_E}\left(1 - \dfrac{2\theta_E^2 r^2}{d^2}\right)$.

On en déduit que $e(r) = \dfrac{d}{2\theta_E} - \dfrac{\theta_E r^2}{d} - \dfrac{d}{2\theta_E} + \dfrac{d\theta_E}{4}$, et on obtient finalement $\boxed{\boldsymbol{e(r) \simeq \dfrac{d\theta_E}{4}\left(1 - \dfrac{4r^2}{d^2}\right)}}$.

Q29. $\boxed{\boldsymbol{\delta(r) = 2n_\ell e(r)}}$, d'où $\boxed{\boldsymbol{p(r) = \dfrac{n_\ell d\theta_E}{2\lambda_0}\left(1 - \dfrac{4r^2}{d^2}\right)}}$.

Q30. L'ordre d'interférence diminue lorsque l'on s'éloigne du centre de l'écran, d'où $\boxed{\boldsymbol{p(r_m) = p_0 + 1 - m}}$.

On peut donc observer $p_0 + 1$ anneaux brillants.

Q31. D'après les questions précédentes, on peut écrire $m = p_0 + 1 + \dfrac{n_\ell d\theta_E}{2\lambda_0}\left(\dfrac{4r_m^2}{d^2} - 1\right)$.

Si on trace m en fonction de r_m^2, on obtient une droite de **coefficient directeur** $\boxed{\boldsymbol{a = \dfrac{2n_\ell\theta_E}{d\lambda_0}}}$

Application numérique : $a = 8{,}39.10^8$ m^{-2}, d'où $\theta_E = 3{,}4.10^{-2}$ rad

III.3 - Glissement d'un liquide sur une paroi solide en microfluidique

Q32. $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ est l'accélération convective.

$-\overrightarrow{\text{grad}}P$ est la résultante volumique des forces de pression.

$\eta\Delta\vec{v}$ est la résultante volumique des forces de viscosité.

Q33. $Re = \dfrac{\rho v h}{\eta} = 10^{-2}$. Comme $Re \ll 1$, on peut négliger la convection et l'équation de NAVIER-STOKES se simplifie en $\boxed{\boldsymbol{-\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v} = \vec{0}}}$.

Q34. Comme $\vec{v} = v_x(z)\vec{u}_x$, on a $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = v_x.\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y.\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z.\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$, donc on retrouve bien $\boxed{\boldsymbol{-\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v} = \vec{0}}}$.

Q35. En projetant l'équation de NAVIER-STOKES sur $\vec{u}_x$, on obtient $\boxed{\boldsymbol{-\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0}}$.

Q36. Comme $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -K$, on a $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\dfrac{K}{\eta}$, d'où $\dfrac{\partial v_x}{\partial z} = -\dfrac{Kz}{\eta} + A$ et $v_x(z) = -\dfrac{Kz^2}{2\eta} + Az + B$.

D'après les conditions aux limites, on a $-\dfrac{Kh^2}{8\eta} + A\dfrac{h}{2} + B = -L_g\left(-\dfrac{Kh}{2\eta} + A\right)$ et $-\dfrac{Kh^2}{8\eta} - A\dfrac{h}{2} + B = L_g\left(\dfrac{Kh}{2\eta} + A\right)$

On en déduit que $-\dfrac{Kh^2}{4\eta} + 2B = \dfrac{L_g Kh}{\eta}$, d'où $B = \dfrac{L_g Kh}{2\eta} + \dfrac{Kh^2}{8\eta}$.

De plus, on a $Ah = -2AL_g$, d'où $A = 0$.

On obtient finalement $\boxed{\boldsymbol{v_x(z) = \frac{KL_gh}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}}$.

Q37. La vitesse s'annule lorsque $\frac{KL_gh}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z_0^2\right) = 0$, soit $\boxed{\boldsymbol{z_0 = \pm\sqrt{L_gh + \frac{h^2}{4}}}}$.

Lorsque $L_g \ll h$, on a $|z_0| = \frac{h}{2}\sqrt{1 + \frac{4L_g}{h}} \simeq \frac{h}{2} + L_g$.

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{L_g = |z_0| - \frac{h}{2}}}$.

On parle de longueur de glissement, car il s'agit de la distance entre la position où la vitesse s'annule, et les parois du canal.

Q38. Le débit volumique s'écrit $D_v = \int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{KL_gh}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right)\ell dz$, soit

$D_v = \frac{K\ell L_g h^2}{2\eta} + \frac{K\ell h^3}{8\eta} - \frac{K\ell}{2\eta}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}$, d'où $\boxed{\boldsymbol{D_v = \frac{K\ell h^2}{2\eta}\left(L_g + \frac{h}{6}\right)}}$.

Q39. En intégrant, on a $P(L) - P(0) = -KL$, d'où $\boxed{\boldsymbol{K = \frac{\Delta P}{L}}}$.

Q40. On a $K = \frac{2\eta D_v}{\ell h^2\left(L_g + \frac{h}{6}\right)}$, d'où $\Delta P = \frac{2\eta L D_v}{\ell h^2\left(L_g + \frac{h}{6}\right)}$, et $\boxed{\boldsymbol{R_h = \frac{2\eta L}{\ell h^2\left(L_g + \frac{h}{6}\right)}}}$.

On parle de résistance hydraulique car le débit volumique est l'équivalent de l'intensité, et la différence de pression est l'équivalent de la tension, donc on retrouve bien l'équivalent de la loi d'OHM $U = RI$.

Q41. Pour $L_g = \frac{h}{2}$, on a $R_h = \frac{3\eta L}{\ell h^3}$ et $R_{h,ng} = \frac{12\eta L}{\ell h^3}$, donc $\boxed{\boldsymbol{\frac{R_h}{R_{h,ng}} = \frac{1}{4}}}$.

Le glissement permet d'avoir une conduite qui s'oppose quatre fois moins à l'écoulement qu'en l'absence de glissement.

*** FIN DU CORRIGE ***