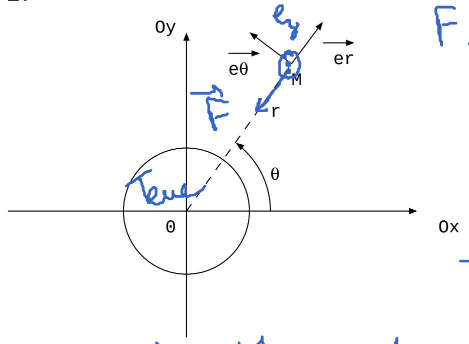
Force centrale

1.



$\vec F = -\mathcal{G}\frac{m M_T}{r^2}\vec{e_r}$ (force poids exercée par la Terre sur le satellite)

TMC à M : $\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec F) = \vec{OM}\wedge\vec F = \vec 0$

($\vec F$ est incapable de faire tourner M autour de O)

$\vec{L_O}(M) = \vec{cste} = m r^2\dot\theta\, \vec{e_z} \Rightarrow \boxed{C = \frac{L}{m} = r^2\dot\theta}$ cste des aires

$\left(\vec{L_O}(M) = \vec{OM}\wedge m\vec v(M) = r\vec{e_r}\wedge m(\dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta}) = m r^2\dot\theta\,\vec{e_z}\right)$

2. Vitesse du satellite: $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ $\boxed{\vec v(M) = \dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta} = \dot r\,\vec{e_r} + \frac{C}{r}\vec{e_\theta}}$

la vitesse orthoradiale ne s'annule jamais (sauf à l'∞)

3. Montrer que $\ddot r = \frac{C^2}{r^3} - \frac{\mathcal{G}M_t}{r^2}$ (∗).

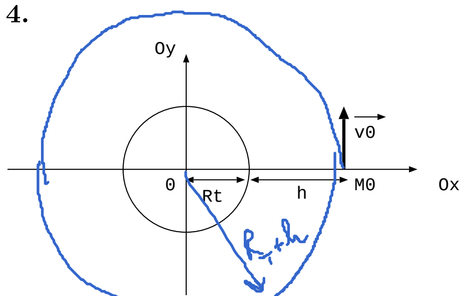
force $\vec F$ conservative donc système conservatif ($E_p = -\mathcal G\frac{m M_T}{r}$)

$E_m = cste = \frac{m v^2}{2} - \mathcal G\frac{m M_T}{r} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \left(\frac{C}{r}\right)^2\right) - \mathcal G\frac{m M_T}{r}$

(avec $\vec v = \dot r\,\vec{e_r} + \frac{C}{r}\vec{e_\theta}$) on a : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = \cancel{m}\cancel{\dot r}\,\ddot r + \frac{mC^2}{2}\left(-2r^{-3}\cancel{\dot r}\right) + \mathcal G\frac{m M_T}{r^2}\cancel{\dot r}$

d'où $\boxed{\ddot r = \frac{C^2}{r^3} - \mathcal G\frac{m M_T}{r^2}}$

4.



PFD à M, $\cancel{m}\vec a = -\mathcal G\frac{\cancel{m} M_T}{(R_T+h)^2}\vec{e_r}$

avec $\vec a = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R_T+h}\vec{e_r} = -\mathcal G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{e_r}$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ mvt uniforme

$\frac{v^2}{R_T+h} = \mathcal G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal G M_T}{R_T+h}}}$

période : $T_1 = \frac{2\pi(R_T+h)}{v_1}$

$\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{\mathcal G M_T}}}$

5. Vitesse v_2:

$E_m \geq 0$ pour quitter l'attraction de la Terre

$E_m = \frac{m v_0^2}{2} - \mathcal G\frac{m M_T}{R_T+h} \geq 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} \geq \mathcal G\frac{M_T}{R_T+h}$ soit $v_0 \geq \sqrt{2\mathcal G\frac{M_T}{R_T+h}}$

soit $\boxed{v_2 \geq \sqrt{2}\, v_1}$

E_m = cste, on la calcule avec les C.I

6. 1 G,Rt,Mt=6.67e-11,6.4e6,5,97e24

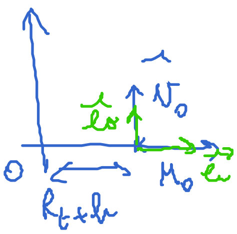
2 h=0.5*Rt altitude au point de lancement

3 v1=(G * Mt / (Rt + h)) ** 0.5

4 T1=2 * np.pi * (Rt + h) / v1

5 v2=2 ** 0.5 * v1

$C = \frac{L}{m} = r^2 \dot\theta$



$\vec{L} = \vec{L}(t=0)$ (cste)

$\vec{L} = \vec{OM_0} \wedge m \vec{v_0}$

$= (R_t + h)\vec{e_r} \wedge m v_0 \vec{e_\theta}$

$= m v_0 (R_t + h) \vec{e_z}$

$C = \frac{L}{m} = v_0 * (R_t + h)$

6 N=10000

7 t=np.linspace(0,T,N)

8 def euler(v0):

9 ——C=(Rt + h) * v0

10 ——r=np.zeros((N)) r = [0, 0 ...]

11 ——theta=np.zeros((N)) theta = [0, 0, ..]

C.I.

12 ——r[0]=Rt + h

13 ——theta[0]=0 (M0 sur l'axe Ox)

14 ——dt=T/(N-1) pas de temps

CI

15 ——vr=0 $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e_\theta}$ donc $v_r = 0$

16 ——for i in range(0,N-1):

17 ————ar=C ** 2 / r[i] ** 3 - G * Mt / r[i] ** 2

18 ————vr=vr + ar * dt

19 ————theta[i+1]=theta[i] + C / r[i] ** 2 * dt

20 ————r[i+1]=r[i] + vr * dt

DL à l'ordre 1 en dt

$\theta(t+dt) = \theta(t) + \dot\theta(t) \times dt$

$\theta_{i+1} = \theta_i + C / r_i^2 \times dt$

DL à l'ordre 1

$\dot r(t+dt) = \dot r(t) + \ddot r(t)\, dt$

$\ddot r = a_r = C^2 / r^3 - G\, M_T / r^2$

$v_r = v_r + a_r \times dt$

nouveau ancien

$r(t+dt) = r(t) + \dot r(t)\, dt$

$r_{i+1} = r_i + v_r \times dt$

21 ——return r,theta

22 for v0 in [v1,1.2*v1,v2,1.2*v2]: 4 valeurs de v_0

$v_0 = v_1$ cercle, $v_0 = 1{,}2 v_1$, $v_0 = v_2$ parabole, $v_0 = 1{,}2 v_2$

23 ——r=euler(v0)[0] → r(t)

24 ——theta=euler(v0)[1] → θ(t)

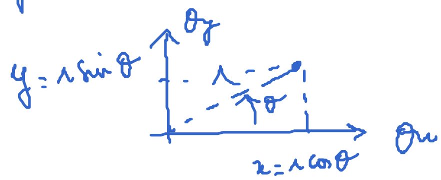
25 ——x=r * np.cos(theta)

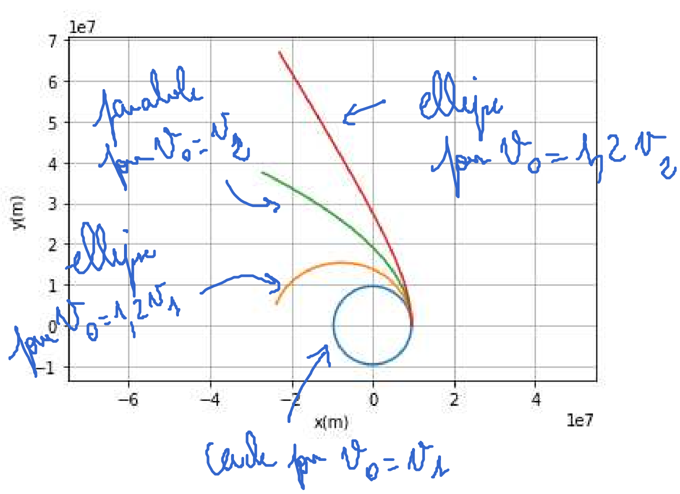
26 ——y=r * np.sin(theta)

27 ——plt.axis('equal')

28 ——plt.plot(x,y)

29 ——plt.show()





6.a. Période du mouvement elliptique:

```
em=v0**2/2-G*Mt/(Rt+h)
C=(Rt+h)*v0
d1=(G*Mt/em)**2-2*c**2/em
d2=-G*Mt/em/2+(d1**0.5/2)
```

Le code renvoie $d2 = 2.4687e7$.