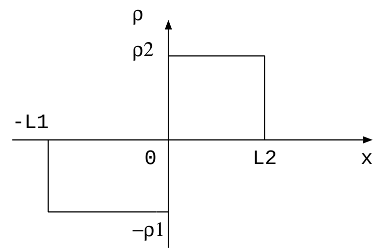
Révisions d'électromagnétisme

I. **Semi conducteur (Théorème de gauss)**

On accole deux matériaux semi-conducteurs. Avec la diffusion, des électrons traversent les matériaux. Cela provoque la création d'une distribution la création d'une distribution volumique de charge notée ρ. L'étude sera unidimensionnelle, la permittivité diélectrique du vide sera remplacée par celle du matériau ϵ (identique pour les deux) dans les équations de l'électrostatique.



1. La distribution de charge étant localement neutre, trouver une relation entre ρ_1, ρ_2, L_1 et L_2.

2. Montrer que $\overrightarrow{E}(M) = E(x)\overrightarrow{e_x}$. Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss l'expression du champ électrique pour tout x sachant que le champ électrique est nul pour $x \to \pm\infty$.

3. Retrouver le résultat en utilisant le théorème de Gauss.

4. Déterminer le potentiel associé. On prendra $V(0) = 0$.

Réponses: 2- $E(x < -L_1) = E(x > L_2) = 0$, $E(-L_1 < x < 0) = -\dfrac{\rho_1}{\epsilon}(x + L_1)$ *et* $E(0 < x < L_2) = \dfrac{\rho_2}{\epsilon}(x - L_2)$

II. **Four micro-ondes (ondes dans le vide)**

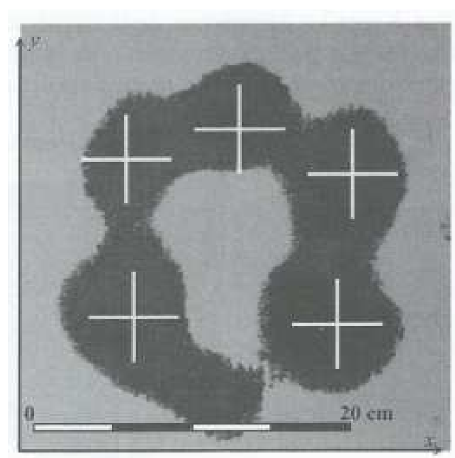
Un four à micro-ondes est une cavité parallélépipédique dans laquelle règne un champ électromagnétique créé par un magnétron. La distribution de ce champ dans la cavité est inhomogène, cet exercice se propose de réaliser une cartographie sommaire du champ en 2D au niveau du plateau. Le détecteur de champ est constitué de fins copeaux de chocolat uniformément répartis sur la plaque inférieure, le plateau tournant ayant été ôté.

On cherche le champ sous la forme:
$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_z}\sin(\dfrac{n\pi x}{a})\sin(\dfrac{m\pi y}{b})\cos(\omega t)$ où a et b sont respectivement la largeur et la profondeur de la plaque inférieure $a = b = 30\ cm$.

1. Commenter la forme de ce champ. Le champ électrique est nul sur les bords de la plaque. Que peut-on en déduire sur les nombres n et m?

2. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\overrightarrow{E}$ dans la cavité ? En déduire la relation que doivent satisfaire ω, n et m.

3. Déduire du cliché donnant les zones où le chocolat a fondu, la valeur numérique de la fréquence du magnétron.



Réponses: 2- $\dfrac{\omega}{c} = \sqrt{(\dfrac{n\pi}{a})^2 + (\dfrac{m\pi}{b})^2}$ 3- $f = 1,8.10^9\ Hz$

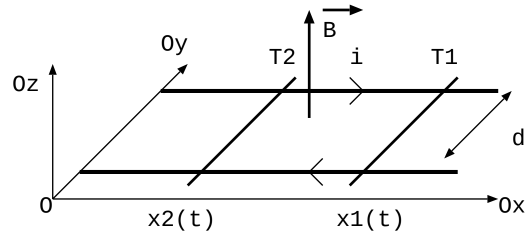
III. **Puissance d'un laser**

Un laser émet un faisceau cylindrique dans lequel se propage une onde progressive plane harmonique polarisée rectilignement. Le laser a une puissance P et la section droite du faisceau a pour aire S. Déterminer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique. AN: $P = 3\ mW$, $S = 2\ mm^2$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ SI$.

Réponse: $E_0 = 1,07.10^3\ V.m^{-1}$

IV. **Induction**

Deux tiges T_1 et T_2 identiques (de masse m) sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles distants de d dans un plan horizontal. Un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ permanent uniforme règne en tout point. À l'instant initial, la tige T_1 est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$, tandis que T_2 est immobile. La résistance électrique de chaque tige est égale à $R/2$ et on néglige la résistance des rails. Les frottements mécaniques et l'autoinduction sont négligés.



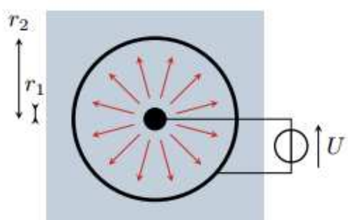
1. Par une analyse qualitative, prévoir le signe de i et le mouvement des deux tiges.

2. Etablir les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

3. Exprimer l'énergie perdue par effet Joule entre $t = 0$ et $t \to \infty$. D'où vient cette énergie?

Réponses: 1- $i > 0$ 2- $i = \dfrac{Bd(v_1 - v_2)}{R}$, $v_1 = \dfrac{v_0}{2}(1 + e^{-t/\tau})$ et $v_1 = \dfrac{v_0}{2}(1 - e^{-t/\tau})$ 3- $E_J = \dfrac{mv_0^2}{4}$

V. **Electrolyseur (conduction électrique)**



L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons $r_1 < r_2$ plongeant sur une hauteur h dans une solution électrolytique de conductivité σ supposée uniforme et constante. Une tension $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$ est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme

$$\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{e_r} \qquad \text{avec} \qquad j(r) > 0\,.$$

1 - En procédant à un bilan de charge sur une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ ($r_1 < r < r + \mathrm{d}r < r_2$), montrer que l'intensité I qui traverse un cylindre de rayon r ne dépend pas de r.

2 - En déduire l'expression de $j(r)$ en fonction de I, r et h, puis celle du champ électrique $\overrightarrow{E}$ au sein de la solution électrolytique.

3 - Établir l'expression de la résistance R de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.

4 - Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant I d'électrolyse.

Réponses: $R = \dfrac{1}{2\pi h\sigma}\ln(\dfrac{r_2}{r_1})$

VI. **Théorème d'Ampère**

L'espace compris entre deux cylindres de même axe Oz, de hauteur h et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ est rempli par des courants dont le vecteur densité s'écrit $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_\theta}$ avec j une constante positive. On néglige les effets de bord.

1. Montrer que le champ magnétique est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_z}$. Préciser la forme des lignes de champ.

2. On admet que le champ magnétique extérieur est nul. Déduire du théorème d'Ampère, l'expression de $B(r)$ pour $r < R_1$ et pour $R_1 < r < R_2$.

3. Retrouver le résultat en utilisant l'équation de Maxwell- Ampère. On donne: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A} = (\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

Réponses: 2- $B(r < R_1) = \mu_0 j(R_2 - R_1)$ et $B(R_1 < r < R_2) = \mu_0 j(R_2 - r)$

VII. **La foudre (conduction électrique)**

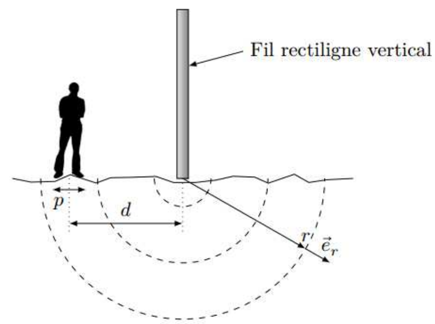
On modélise un éclair par un fil rectiligne de rayon $R \approx 1,5\ cm$ et de longueur $l = 500\ m$ parcouru par un courant d'intensité $I = 10kA$ allant des nuages jusqu'au sol pendant un durée $\Delta t = 25\ ms$. En dessous des nuages orageux, il se forme un champ électrique d'environ 20 000 V/m. Données: $e = 1,6.10^{-19}\ C$

1. Lorsque la foudre tombe, quel est le nombre d'électrons allant du nuage vers le sol ?

2. Quelle conductivité électrique pourrait-on attribuer à l'air dans ces conditions ?

3. Quelle est l'ordre de grandeur de l'énergie dissipée lors d'un éclair ?

Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter près d'un arbre. L'éclair traversant l'arbre est modélisé par le fil rectiligne vertical décrit précédemment qui prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité volumique de courant est radiale, de la forme $\overrightarrow{j_s} = j_s(r,t)\overrightarrow{e_r}$. On note γ_s la conductivité électrique du sol.



4. Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E_s}$ dans le sol.

5. Un être humain se trouve à la distance moyenne d de l'arbre et la distance entre ses deux pieds est p. Déterminer l'expression, en fonction de p et d, des potentiels au niveau des pieds de l'être humain. En déduire l'expression de la différence de potentiel entre les pieds U_p appelée tension de pas. Données: $p = 50\ cm$, $d = 1\ m$ et $\gamma_s = 1,5\ S.m^{-1}$.

Réponses: 1- $N = 1,56.10^{21}$ *électrons 2-* $\gamma = 707\ S.m^{-1}$ *3-* $E = 2,5.10^9\ J$ *5-* $U_p = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma_s(d^2 - (p/2)^2)} = 1400\ V$

VIII. **Absorption dans un milieu conducteur**

Un faisceau lumineux monochromatique, dont le champ électrique est donné par $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0\overrightarrow{e_y}e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ en notation complexe, traverse un milieu matériel homogène localement neutre, dont la conductivité électrique est γ. La célérité de la lumière dans le vide est notée c.

1. Ecrire l'équation de propagation du champ électrique dans le milieu et en déduire la relation de dispersion donnant $\underline{k}^2$ en fonction de γ, μ_0, c et ω.

2. On note $\underline{k} = k_r - ik_i$ où k_r et k_i sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$. Exprimer le champ électrique en notation réelle. Commenter le résultat et en déduire le signe de k_i.

3. En déduire le champ magnétique en notation réelle.

4. Rappeler la relation entre l'intensité I de l'onde électromagnétique et le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$.

Montrer que l'intensité de l'onde est de la forme $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$. Exprimer x en fonction de k_i.

Réponses: 1- $\Delta\overrightarrow{\underline{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\gamma\dfrac{\partial\overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ *et* $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$ *3-* $\overrightarrow{B} = \dfrac{e^{-k_i x}E_0}{\omega}\overrightarrow{e_z}(k_i\sin(\omega t - k_r x) + k_r\cos(\omega t - k_r x))$ *4-* $\alpha = \dfrac{1}{2k_i}$

IX. **Aimantation du cobalt (dipôle magnétique)**

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron de masse m et de charge $-e$ décrit une orbite circulaire de rayon R autour du proton supposé immobile. Données: $e = 1,6.10^{-19}\ C$, $m = 9,0.10^{-31}\ kg$, $\hbar = 1,0.10^{-34}\ SI$.

1. Etablir l'expression de la pulsation du mouvement de l'électron autour du proton.

2. Etablir l'expression du moment magnétique de l'atome d'hydrogène en fonction de e, ω, R et un vecteur unitaire à préciser.

3. Le moment cinétique de l'électron est quantifié selon la relation $\overrightarrow{L}_O = n\hbar\overrightarrow{e_z}$. Montrer que le moment magnétique est quantifié, on appelle μ_B le magnéton de Bohr, soit le moment magnétique dans l'état fondamental. Calculer μ_B.

4. Le cobalt est un matériau ferromagnétique, en supposant que chaque atome porte un moment magnétique égal au magnéton de Bohr, calculer le moment magnétique maximum d'un aimant de cobalt de forme cylindrique de rayon $a = 1\ cm$ et de hauteur $h = 5\ mm$. Données: masse volumique et masse molaire du cobalt: $\rho = 8,9.10^3\ kg.m^{-3}$ et $M = 58,9\ g.mol^{-1}$, $\mathcal{N}_a = 6,0.10^{23}\ atomes.mol^{-1}$.

Réponses: 3- $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ *4-* $M_{max} = N\mu_B = 1,28\ A.m^2$

X. **Pression au centre de la Terre (théorème de Gauss pour la gravitation)**

On modélise la Terre par une sphère homogène de masse volumique constante ρ, de rayon R_T et de masse totale M_T. Données: $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$, $M_T = 6,0.10^{24}\ kg$ et $R_T = 6400\ km$.

1. Déduire de l'analogie électrostatique-gravitation, l'énoncé du théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}(r)$ à l'intérieur de la Terre.

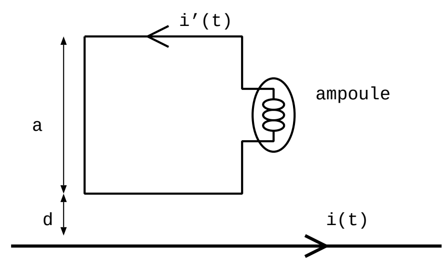
2. Rappeler la relation de la statique des fluides et déduire de la question précédente que $\dfrac{dP}{dr} = -\alpha^r$. Exprimer α en fonction de ρ et $\mathcal{G}$.

3. Déterminer la pression au centre de la Terre R_T, M_T et $\mathcal{G}$. La valeur communément admise de cette pression est 380 GPa, commenter.

Réponses: 2- $\alpha = \dfrac{4\pi\rho^2\mathcal{G}}{3}$ *3-* $P(r = 0) = 190\ GPa$

XI. **Ligne HT**

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon Oz transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50\ Hz$ et de valeur efficace $I = 1000\ A$. On approche de cette ligne HT une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30\ cm$ à une distance $d = 2\ cm$. Cette bobine de résistance négligeable est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à $1,5\ V$. On néglige l'auto-induction.



On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. Donnée: $\mu_0 = 1,26.10^{-6}\ H.m^{-1}$.

1. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, donner l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS (note: dans l'ARQS, on fait l'hypothèse que le courant de déplacement devant le courant de conduction).

2. Déterminer en coordonnées cylindriques le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ créé dans tout l'espace par cette ligne HT.

3. Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne HT à travers la bobine plate.

4. En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique.

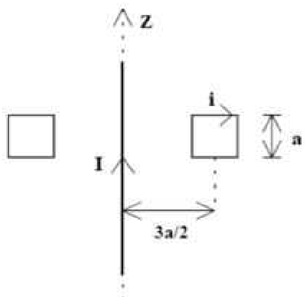
5. On assimile maintenant l'ampoule à une résistance $r = 10\ \Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10\ mH$. Calculer alors la valeur efficace I' de $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1,5\ V$ et le déphasage de $i'(t)$ par rapport à $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

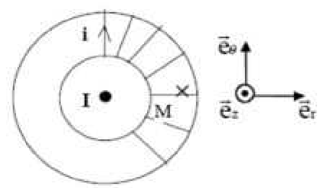
Réponses: 2- $\overrightarrow{B}(M) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ *3-* $\phi = \dfrac{N\mu_0 ia}{2\pi}\ln(\dfrac{d+a}{d})$ *4-* $N = 29$ *5-* $I' = 0,14\ A$ *et* $\phi' = -1,9\ rad$

XII. **Théorème d' Ampère : pince ampèremétrique**

Les ampèremètres usuels ne supportent pas les fortes intensités (en général, $i_{max} = 10\ A$). Pour mesurer des intensités supérieures, on utilise une pince ampèremétrique, dont on va étudier le principe.

Un fil rectiligne infini d'axe Oz est parcouru par un courant (c'est le courant à mesurer) d'intensité : $I(t) = I_m \cos(\omega t)$. On entoure le fil d'un bobinage constitué d'un tore de section carrée de côté a et de rayon moyen $\dfrac{3a}{2}$, sur lequel sont régulièrement enroulées un grand nombre de spires N. Ce bobinage est relié à un ampèremètre, le circuit ainsi réalisé (tore+ampèremètre) a une résistance totale R et est parcouru, par induction, par un courant sinusoïdal : $i(t) = i_m \cos(\omega t = \phi)$.





1. Déduire du théorème d'Ampère, le champ magnétique créé par le tore en un point M à l'intérieur de celui-ci.

2. On rappelle que le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par le courant d'intensité I en un point à la distance r du fil est $B(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Exprimer le champ magnétique total en un point à l'intérieur du tore et en déduire le flux de ce champ magnétique à travers tout le tore.

3. On se place en notation complexe: $\underline{I} = I_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = i_m e^{j\phi} e^{j\omega t}$.

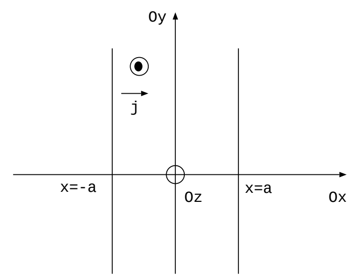
Exprimer la force électromotrice induite dans le tore $\underline{e}$ en notation complexe (régime sinusoidal forcé de pulsation ω) et déduire du circuit électrique équivalent l'expression de $\underline{i}$ en fonction de $\underline{I}$, N, a, μ_0, R et ω. En déduire également $\dfrac{i_m}{I_m}$.

4. Montrer que pour les données suivantes: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$, $R = 10\ \Omega$, $f = 1\ kHz$, $a = 5\ cm$ et $N = 10^4$, on a $\dfrac{i_m}{I_m} \approx \dfrac{1}{N}$. Quelle intensité I_m maximale peut-on mesurer avec cette pince pour $i_{max} = 10\ A$?

Réponses : 1- $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ *2-* $\phi = \dfrac{\mu_0 N(I + Ni)a \ln 2}{2\ pi}$ *3-* $\underline{i} = -\dfrac{\underline{I}}{N - j\frac{2\pi R}{\mu_0 N \omega a \ln 2}}$

XIII. **Champ créé par des courants dans un parallélépipède (théorème d'Ampère)**

Soit des courants présents entre les deux plans infinis d'équation $x = -a$ et $x = +a$. La densité de courants s'écrit $\overrightarrow{j}(x) = j_0 x^2 \overrightarrow{e_z}$ pour $-a \leq x \leq a$ et $\overrightarrow{j}(x) = \overrightarrow{0}$ pur $x < -a$ et $x > a$.



1. Déterminer la direction du champ magnétique et la variable dont il dépend.

2. Donner, en la justifiant, la relation entre $\overrightarrow{B}(x)$ et $\overrightarrow{B}(-x)$.

3. Appliquer le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

Réponses: 3- $B(x < a) = \dfrac{\mu_0 j_0 x^3}{3}$ *et* $B(x > a) = \dfrac{\mu_0 j_0 a^3}{3}$

XIV. **Cylindre infini en rotation (théorème d'Ampère)**

Cylindre infini en rotation autour de son axe : Un long cylindre, supposé infini, de rayon R et chargé uniformément en volume avec la densité volumique de charges ρ, tourne à vitesse angulaire ω constante autour de son axe Oz relativement au référentiel du laboratoire. Le milieu a des propriétés identiques à celles du vide, et on suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique. Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques.

1. Exprimer le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ dans le cylindre.

2. Montrer que le champ magnétique est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_z}$. Préciser la forme des lignes de champ.

3. On admet que le champ magnétique extérieur est nul. Déduire du théorème d'Ampère, que le champ magnétique à l'intérieur du cylindre s'écrit $\overrightarrow{B}(M) = \dfrac{\mu_0 \omega \rho}{2}(R^2 - r^2)\overrightarrow{e_z}$.

Réponse: 1- $\overrightarrow{j} = \rho \omega r \overrightarrow{e_\theta}$