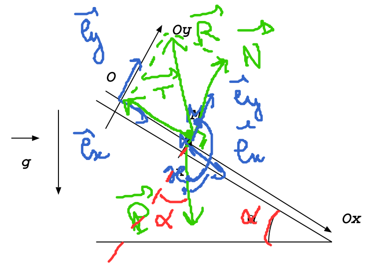
IV - Applications de la RFD

Pour tous ces exemples, on donne l'accélération du champ de pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

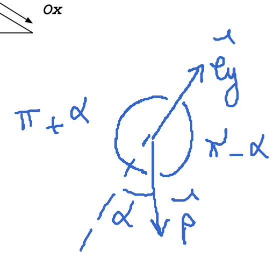
Exemple 1: soit un point matériel M de masse m sur un plan incliné qui fait un angle α par rapport à l'horizontale. Soit f le coefficient de frottement entre le point matériel et le plan incliné. Déterminer la condition sur α pour que le point matériel soit en équilibre sur le plan incliné. Lorsque cette condition n'est pas réalisée, le point matériel se met à glisser, il part de O sans vitesse initiale. Etablir l'expression de $x(t)$ en fonction de g, α, f et t.



équilibre

⚠ ici $\vec R = -\vec P$

R : réf. galiléen



forces exercées sur M : son poids $\vec P = m\vec g$

la réaction du support $\vec R = \vec N + \vec T$

RFD : $\vec P + \vec N + \vec T = \vec 0$ (équilibre)

on projette sur $\vec e_x$: $\vec P \cdot \vec e_x + \vec N \cdot \vec e_x + \vec T \cdot \vec e_x = 0$

sur $\vec e_y$: $\vec P \cdot \vec e_y + \vec N \cdot \vec e_y + \vec T \cdot \vec e_y = 0$

$mg \times \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\sin\alpha} + 0 - \|\vec T\| = 0$ (*)

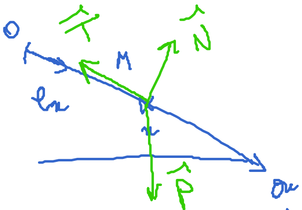
$mg \times \underbrace{\begin{matrix}\cos(\pi-\alpha)\\ \cos(\pi+\alpha)\end{matrix}}_{-\cos\alpha} + \|\vec N\| + 0 = 0$ (**)

(*) $\|\vec T\| = mg\sin\alpha$ (**) $\|\vec N\| = mg\cos\alpha$

Lois de Coulomb : équilibre : pas de glissement $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$

$\cancel{m}g\sin\alpha \leq f\cancel{m}g\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\tan\alpha \leq f}$ condition d'équilibre

Hors équilibre



RFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

sur $\vec{e}_x$: $\vec{P}\cdot\vec{e}_x + \vec{T}\cdot\vec{e}_x + \vec{N}\cdot\vec{e}_x = m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \|\vec{T}\|$ (*)

sur $\vec{e}_y$: $\vec{P}\cdot\vec{e}_y + \vec{T}\cdot\vec{e}_y + \vec{N}\cdot\vec{e}_y = 0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{N}\|$ (**)

M glisse : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = f\,mg\cos\alpha$ (**)

$\vec{OM} = x\,\vec{e}_x$ $\quad \vec{v}(M) = \dot{x}\,\vec{e}_x$

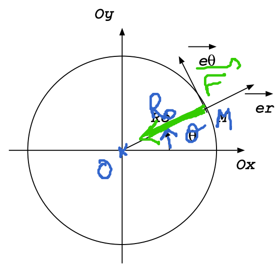
$\vec{a}(M) = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

(*) $\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m}g\sin\alpha - f\cancel{m}g\cos\alpha$ ($\ddot{x}$ cte)

$\dot{x} = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)t + \cancel{v_0}^{\,0}$

$x = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + \cancel{x_0}^{\,0}$

Exemple 2: un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon R_o autour de la Terre. On note M_T la masse de la Terre. Déduire de la RFD appliquée au satellite l'expression de la vitesse v_o du satellite sur son orbite ainsi que la période T_O de son mouvement. Exprimer l'énergie mécanique du satellite.



ici j'utilise cette expression car je cherche v

Coord

$\vec{OM} = R_0\,\vec{e}_r$

$\vec{v}(M) = R_0\frac{d\vec{e}_r}{dt} = R_0\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{a}(M) = R_0\Big[\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\underbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}}_{-\dot{\theta}\,\vec{e}_r}\Big] = R_0\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R_0\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r \underset{v = R_0\dot{\theta}}{=} \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R_0}\vec{e}_r$

R : réf. galiléen

forces exercées sur le satellite : poids (ou attraction gravitationnelle) $\vec{F} = -G\frac{m \times M_T}{R_0^2}\vec{e}_r$

RFD : $m\vec{a}(M) = \vec{F}$ soit $m\left(\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R_0}\vec{e}_r\right) = -G\frac{mM_T}{R_0^2}\vec{e}_r$

on projette sur $\vec{e}_r$: $m\frac{dv}{dt}\cancel{\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_r} - m\frac{v^2}{R_0}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = -G\frac{mM_T}{R_0^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r$

$-\cancel{m}\frac{v^2}{R_0} = -G\frac{\cancel{m}M_T}{R_0^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{R_0^2}$ ou $\boxed{v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_0}}}$

on projette sur $\vec{e}_\theta$: $m\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta - m\frac{v^2}{R_0}\cancel{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta} = -G\frac{mM_T}{R_0^2}\cancel{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta}$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = $ cste ou mvt uniforme

Période : $\boxed{T} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \boxed{\frac{2\pi R_0}{v}}$

en 1 période le satellite décrit le périmètre du cercle

$E_m = E_c + E_p$

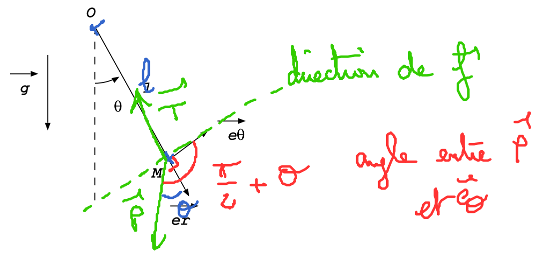
$= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{R_0}$

$= \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{R_0} - G\frac{mM_T}{R_0}$

$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}G\frac{mM_T}{R_0}}$

$v^2 = G\frac{M_T}{R_0}$

Exemple 3: soit un pendule simple de longueur l et de masse m. On tient compte des frottements de l'air $\vec{f} = -mh\vec{v}(M)$ où h est une constante positive. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ en projetant la RFD sur une direction adéquate.



$\vec{OM} = l\,\vec{e_r}$ $\quad \vec{v}(M) = l\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ $\quad v = l\dot{\theta}$

$\vec{a}(M) = l\left[\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] = l\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \dfrac{v^2}{l}\vec{e_r}$

R : réf. galiléen

RFD : $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = ml\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - ml\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$ avec $\vec{f} = -hm\vec{v} = -mhl\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

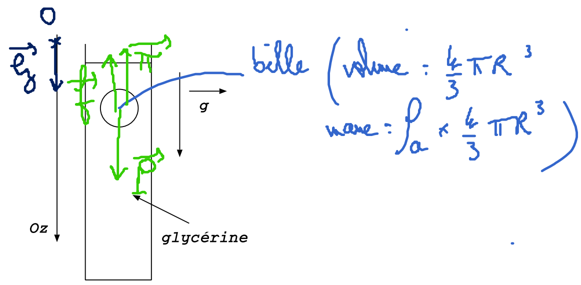
$\vec{P} + \vec{T} - mhl\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = ml\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - ml\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$ $\quad \vec{T}$ inconnue ?

On projette sur $\vec{e_\theta}$ (je cherche à éliminer $\vec{T}$ or $\vec{T}$ est $\perp$ à $\vec{e_\theta}$: $\vec{T}\cdot\vec{e_\theta} = 0$)

$\vec{P}\cdot\vec{e_\theta} + \cancel{\vec{T}\cdot\vec{e_\theta}} - mhl\dot{\theta}\,\underbrace{\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_\theta}}_{=1} = ml\ddot{\theta}\,\underbrace{\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_\theta}}_{1} - ml\dot{\theta}^2\,\cancel{\vec{e_r}\cdot\vec{e_\theta}}$

$mg\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}_{-\sin\theta} - mhl\dot{\theta} = ml\ddot{\theta}$ d'où $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$

Exemple 4: une bille d'acier sphérique de rayon $R = 3,0\ mm$ est lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie de glycérine. On note Oz la verticale descendante. La bille subit la force de frottements fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}(M)$ où η est la viscosité de la glycérine et $\vec{v}(M)$ la vitesse de la bille. Données: masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7600\ kg.m^{-3}$, masse volumique de la glycérine : $\rho_g = 1260\ kg.m^{-3}$



$\vec{v} = v(t)\,\vec{e_z}$

Montrer par un calcul numérique que l'on peut négliger la poussée d'Archimède par rapport au poids. Déduire de la RFD appliquée à la bille,l' équation différentielle vérifiée par $v(t)$. Préciser la constante de temps du régime transitoire. Calculer la viscosité de la glycérine sachant que l'on mesure $v_l = 11,4\ cm.s^{-1}$: vitesse limite de la bille.

Forces exercées sur la bille dans R : galiléen : poids $\vec{P} = \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3\,\vec{g}$, les frottements fluide $\vec{f} = -6\pi R\eta v\,\vec{e_z}$

poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\underbrace{\rho_g \frac{4}{3}\pi R^3}\,\vec{g}$

(masse de la bille constituée de glycérine)

AN : $\|\vec{P}\| = \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 g = 8,4.10^{-3}\,N$ $\quad \|\vec{\Pi}\| = \rho_g \frac{4}{3}\pi R^3 g = 1,4.10^{-3}\,N \ll \|\vec{P}\|$

RFD à la bille : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi R\eta\vec{v}$ avec $\vec{v} = v\,\vec{e_z}$ et $\vec{g} = g\,\vec{e_z}$ (Oz vertical descendant)

$m\dfrac{dv}{dt}\vec{e_z} = mg\,\vec{e_z} - 6\pi R\eta v\,\vec{e_z}$

On projette sur $\vec{e_z}$: $m\dfrac{dv}{dt} = mg - 6\pi R\eta v$

$\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{6\pi R\eta}{m}v = g}$ avec $m = \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3$

éq. de la forme : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = g$

par identification : $\tau = \dfrac{m}{6\pi R\eta}$: temps de relaxation (durée du régime transitoire)

$\boxed{v_l = g\times\tau = \dfrac{mg}{6\pi R\eta}}$ (vitesse limite est cste donc $\dfrac{dv_l}{dt} = 0$ c'est la solution particulière)