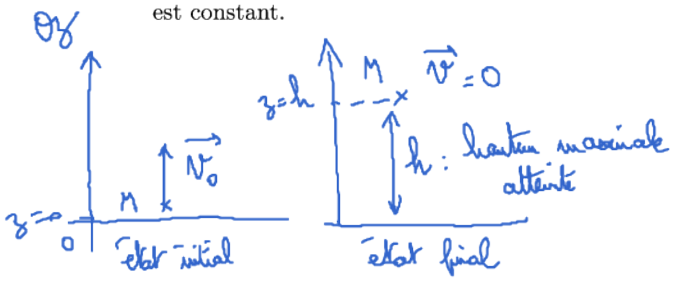
## VI. Applications des théorèmes énergétiques

*Exemple 1:* soit un point matériel de masse $m$ qu'on lance depuis le sol avec une vitesse $\vec{v_0}$ verticale ascendante. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif et exprimer la hauteur maximale atteinte par le point matériel lorsqu'on néglige tout frottement et qu'on suppose que le champ de pesanteur est constant.




$\mathcal{R}$ : galiléen

force exercée sur M : poids $\vec{P}$ : conservative $E_p = + mgz$ (Oz vertical ascendant)

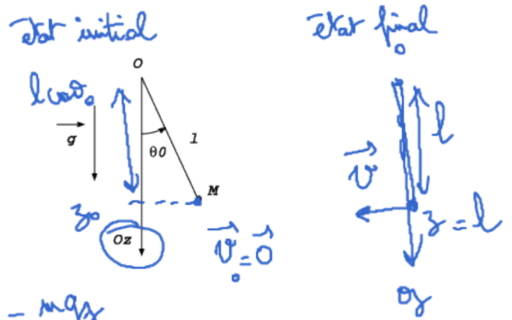
donc M constitue un système conservatif

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$ est une constante

$E_{m_i} = E_{m_f}$ donc $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + mgh$

$\frac{v_0^2}{2} = gh$ soit $\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$

*Exemple 2:* soit un pendule simple de masse $m$ et de longueur $l$. On néglige tout frottement. On écarte le pendule d'un angle $\theta_0$ par rapport à la verticale et on l'abandonne sans vitesse initiale. Montrer que le pendule est un système conservatif, exprimer la vitesse du pendule lorsqu'il arrive à la verticale.




$\mathcal{R}$ : galiléen

forces exercées sur M : poids : $\vec{P}$ : force conservative $E_p = - mgz$

tension du fil $\vec{T}$ : $\perp$ au mvt donc elle ne travaille

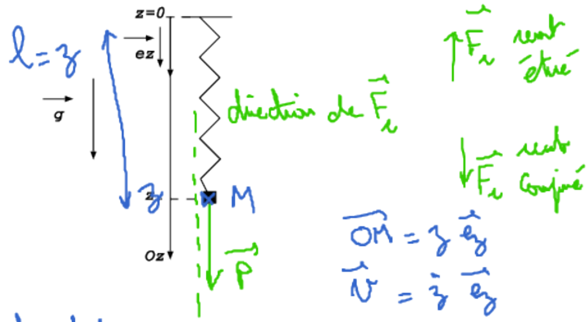

donc M constitue un système conservatif

$E_m = \frac{m v^2}{2} - mgz = \text{Cte}$

$E_{m_i} = E_{m_f}$ donc $0 - mgl\cos\theta_0 = \frac{m v^2}{2} - mgl$

$\frac{v^2}{2} = gl - gl\cos\theta_0$ soit $\boxed{v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\theta_0)}}$

*Exemple 3:* soit un point matériel $M$ de masse $m$ relié à un ressort de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$. On repère la position de $M$ par sa côte $z$ ($Oz$ verticale descendante). Etablir l'expression de l'énergie mécanique du point matériel et déduire du théorème de la puissance ~~cinétique~~ mécanique l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque on néglige tout frottement. La résoudre pour déterminer $z(t)$ lorsque le point matériel est abandonné sans vitesse initiale lorsque la longueur ressort est égale à sa longueur à vide. Indice: oscillateur harmonique.




$\vec{OM} = z\,\vec{e_z}$

$\vec{v} = \dot{z}\,\vec{e_z}$

$R$ : galiléen

Forces exercées sur $M$ : poids $\vec{P}$ : conservatif $\quad E_{pp} = -mgz$ ($Oz$) descendant

force de rappel élastique : $\vec{F}_r$ : conservative $\quad E_{pe} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 = \frac{k}{2}(z - l_0)^2$

donc $M$ est un système conservatif

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz + \frac{k}{2}(z - l_0)^2 = \text{constante}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{\vec{F}_{n.c.}} = 0$$

pas de forces non conservatives

$$\frac{d}{dt}(u^2) = 2u \times u' = 2u \times \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2}\right) - \frac{d}{dt}(mgz(t)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{2}(z - l_0)^2\right) = 0$$

$u = \dot{z}$ $\qquad$ $u = z(t) - l_0$

$$\frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{z} \times \frac{d\dot{z}}{dt} - mg\dot{z} + \frac{k}{\cancel{2}}\cancel{2}(z - l_0)\frac{d}{dt}(z(t) - l_0) = 0$$

$$m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} - mg\cancel{\dot{z}} + k(z - l_0)\cancel{\dot{z}} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{kl_0}{m}}$$

$> 0$

C'est l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Solution générale : $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

" particulière : $\frac{k}{m}z_p = g + \frac{kl_0}{m} \Rightarrow z_p = \frac{mg}{k} + l_0$ (position d'équilibre) $\quad z_p > l_0$ : ressort étiré

$(\ddot{z}_p = 0)$

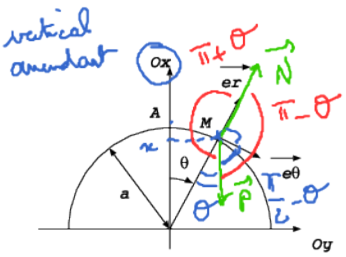
$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0 + \frac{mg}{k}$ $\qquad$ $\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

C.I : $z(t=0) = l_0 = A + l_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow A = -mg/k$

$\dot{z}(t=0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{z(t) = -\frac{mg}{k}\cos(\omega_0 t) + l_0 + \frac{mg}{k}}$$

*Exemple 4:* soit un point matériel $M$ de masse $m$ qui se déplace sur une demi-sphère de centre $O$ et de rayon $a$. On néglige tout frottement. $M$ est abandonné sans vitesse initiale depuis le haut de la sphère en $A$. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif, exprimer sa vitesse lorsqu'il est à la position repérée par $\theta$. Déduire de la RFD la réaction du support lorsque le point matériel se trouve en $\theta$. Indice : utiliser $\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$




R : galiléen

forces exercées sur M : poids $\vec{P}$ : conservatif $E_p = +mgx$

réaction $\vec{N}$ : ne travaille pas

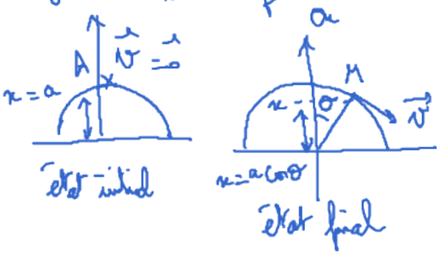
donc M constitue un système conservatif. ⇒ $E_m$ = constante

⚠ $a$ : rayon de la sphère

$\vec{a}$ : accélération

on $E_{m_i} = E_{m_f}$

$$0 + \cancel{m}ga = \cancel{m}\frac{v^2}{2} + \cancel{m}g\,a\cos\theta$$




$$\boxed{v = \sqrt{2ga(1-\cos\theta)}}$$

$\vec{OM} = a\vec{e_r}$

$\vec{v}(M)_R = a\frac{d\vec{e_r}}{dt} = a\dot{\theta}\vec{e_\theta}$  $v = a\dot{\theta}$

$\vec{a}(M)_R = a\left[\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] = a\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - a\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$\vec{a}(M)_R = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{a}\vec{e_r}$ ‖ ici c'est cette expression que l'on utilise

RFD à M : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$

$$m\frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - m\frac{v^2}{a}\vec{e_r} = \vec{P} + \vec{N}$$

on projette sur $\vec{e_\theta}$ : $m\frac{dv}{dt}\underbrace{\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_\theta}}_{1} = \vec{P}\cdot\vec{e_\theta} + \vec{N}\cdot\vec{e_\theta}$

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$ : inutile ici !

on projette sur $\vec{e_r}$ : $-m\frac{v^2}{a}\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}}_{1} = \vec{P}\cdot\vec{e_r} + \vec{N}\cdot\vec{e_r}$

$$-m\frac{v^2}{a} = mg\cos(\pi-\theta) + \|\vec{N}\| \Rightarrow \|\vec{N}\| = -m\frac{v^2}{a} + mg\cos\theta$$

ou $\underbrace{\cos(\pi+\theta)}_{-\cos\theta}$

$v^2 = 2ga(1-\cos\theta)$

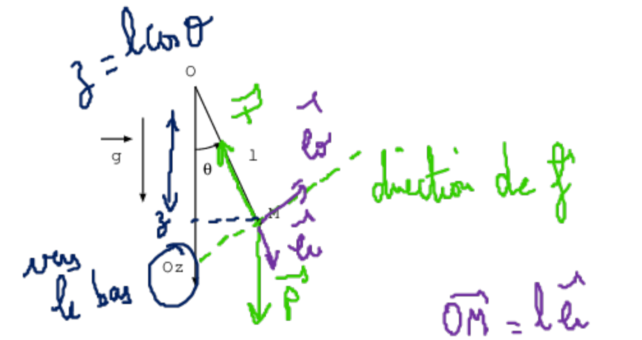
$$= -\frac{m}{\cancel{a}}\left(2g\cancel{a}(1-\cos\theta)\right) + mg\cos\theta$$

$$\boxed{\|\vec{N}\| = -2mg + 3mg\cos\theta}$$

Rq : M décolle (quitte le support) pour $\vec{N} = \vec{0}$ : $+2mg = 3mg\cos\theta$  $\boxed{\cos\theta = 2/3}$

### VI- Applications des théorèmes énergétiques

*Exemple 5:* soit un pendule simple de masse $m$ et de longueur $l$. On note $\theta$ l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale. Le pendule subit une force de frottements fluide de la forme $\vec{f} = -mh\vec{v}(M)$. Déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par $\theta$.



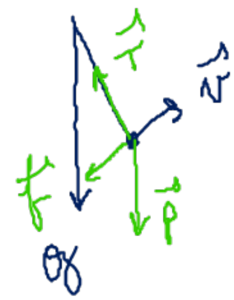

$\overrightarrow{OM} = l\hat{e}_r$

$\vec{v}(M) = l\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

Bilan des forces sur M :

* le poids : conservatif : $E_{pp} = -mgz = -mgl\cos\theta$

ou




* la tension du fil $\perp$ au mvt : $\mathcal{P}^{\vec{T}} = 0$
* la force de frottements : non conservative

$$\mathcal{P}^{\vec{f}} = \vec{f}\cdot\vec{v}(M) = -mh\vec{v}\cdot\vec{v} = -mhv^2 = -mhl^2\dot{\theta}^2 < 0$$ force résistante

th. de la puissance mécanique : $\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{f.n.c.}$

ici $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_{pp} = \dfrac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{ml^2}{2}\frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} - mgl\frac{d}{dt}(\cos\theta) = \frac{ml^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl(-\sin\theta)\dot{\theta}$$

$\dot{\theta} = u \quad \dfrac{du^2}{dt} = 2uu'$ $\qquad \dfrac{d}{dt}(\cos\theta) = \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta)\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}$

d'où : $ml^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} = -mhl^2\dot{\theta}^{\cancel{2}}$

on divise par $ml^2$

$$\boxed{\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$