Révisions cours de mécanique

I. Cinématique

$(x(t), y(t), z(t))$

Coordonnées cartésiennes: Soit un point matériel repéré par ses coordonnés cartésiennes (x, y, z).

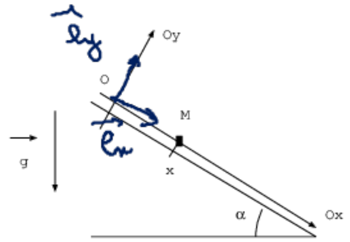
Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ vecteurs de base : $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ vecteurs fixes (constants)

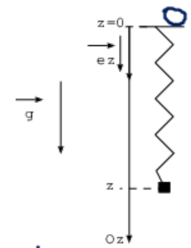
Vecteur vitesse: $\vec{v}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$

⚠ $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Vecteur accélération: $\vec{a}(M) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$

exps





$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x}$ $\vec{v}(M) = \dot{x}\,\vec{e_x}$ $\vec{a}(M) = \ddot{x}\,\vec{e_x}$

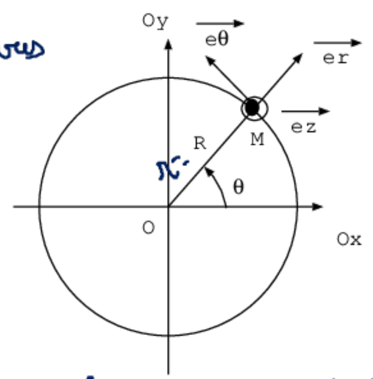
$\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e_z}$ $\vec{v}(M) = \dot{z}\,\vec{e_z}$ $\vec{a}(M) = \ddot{z}\,\vec{e_z}$

.

Coordonnées polaires: Soit un point matériel M qui décrit un cercle de centre O et rayon R. On note θ l'angle que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à Ox. On note la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

$(uv)' = u'v + uv'$

$\vec{e_z}$ vient vers nous



coord polaires : $(r = R, \theta)$ cste

vecteurs de base : $(\underbrace{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}}_{\text{mobiles}}, \underbrace{\vec{e_z}}_{\text{fixe}})$

Vecteur vitesse: $\vec{v}(M) = R\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$-\dot{\theta}\,\vec{e_r}$

Vecteur accélération: $\vec{a}(M) = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$= R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$

Moment cinétique: $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \Lambda m\vec{v}(M)$

$\vec{L}_O(M) = R\vec{e_r} \wedge mR\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = mR^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

$(\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z})$

♡ $\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ et $\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}$

Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$

Très important: pour la RFD pour un mouvement circulaire: on a $\vec{a}(M) = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$ avec $v = R\dot{\theta}$.

$\vec{a}(M) = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$ avec $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$v = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v}{R}$ vitesse angulaire

$\vec{a}(M) = R\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{R}\right)\vec{e_\theta} - R\left(\dfrac{v}{R}\right)^2\vec{e_r} = \underbrace{\dfrac{dv}{dt}\,\vec{e_\theta}}_{\text{accélération tangentielle}} - \underbrace{\dfrac{v^2}{R}\,\vec{e_r}}_{\text{accélération radiale centripète}}$

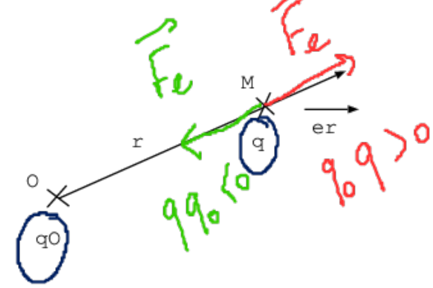
II. Les forces

Force d'interaction électrostatique entre deux charges:

force exercée en M

La charge q_O placée en O exerce sur la charge q placée en M la force: $\overrightarrow{F_e} = + \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}$

1 seule expression pour les 2 cas



Cette force est attractive dans le cas où $q_0 q < 0$ (charges de signes opposés)

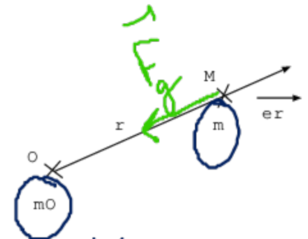
Cette force est répulsive dans le cas où ... $q_0 q > 0$ (charges de même signe)

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pe} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon r}$

Force d'interaction gravitationnelle entre deux masses:

La masse m_O placée en O exerce sur la masse m placée en M la force: $\overrightarrow{F_g} = - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e_r}$

force exercée sur M

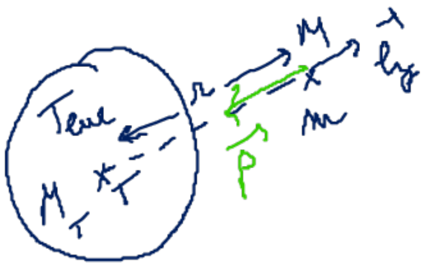


Cette force est attractive.

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pg} = - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}$

Le poids: cas particulier de la force gravitationnelle

C'est la force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et un objet. Cette force s'écrit $\overrightarrow{P} = - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r^2} \vec{e_z} = m\vec{g}$



par identification : $\vec{g} = - \mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \vec{e_z}$: champ de gravitation

Dans le cas où le point matériel étudié possède une altitude négligeable par rapport au rayon de la Terre, soit ce point matériel est sur la surface de la Terre. La force poids s'écrit $\overrightarrow{P} = m\vec{g_0}$

avec $||\vec{g_0}|| = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$

Cette force est conservative, son énergie potentielle augmente quand l'altitude augmente

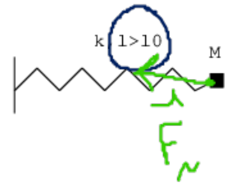
Si on désigne par Oz la verticale ascendante, l'énergie potentielle de pesanteur est $E_{pp} = + mgz$ $(z \uparrow, E_{pp} \uparrow)$

Si on désigne par Oz la verticale descendante, l'énergie potentielle de pesanteur est $E_{pp} = - mgz$ $(z \uparrow, E_{pp} \downarrow)$

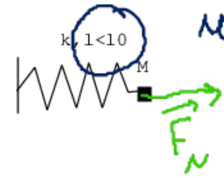
Force de rappel élastique: soit un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On note l la longueur du ressort à un instant quelconque.

N.m^{-1}

ressort étiré



ressort comprimé



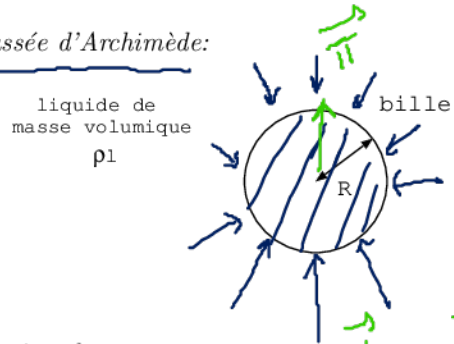
La masse m subit la force de rappel élastique de la part du $\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}_{\text{ressort vers } M}$ B

(loi de Hooke)

$\overrightarrow{u}$: vecteur unitaire dirigé du ressort vers M

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pr} = +k\dfrac{(l-l_0)^2}{2}$ B

La poussée d'Archimède:

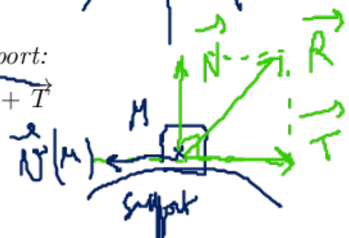


♡ C'est la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un objet. Cette force est verticale ascendante égale au poids du volume de fluide déplacé par l'objet. B

$||\overrightarrow{\Pi}|| = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{volume de la bille}} \times \rho_l \times g$

La réaction du support:

Elle s'écrit $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$



- $\overrightarrow{N}$ est la composante normale qui ne s'annule que lorsque l'objet perd le contact avec le support
- $\overrightarrow{T}$ est la composante tangentielle qui est opposée au mouvement et qui est nulle lorsque il n'y a pas de frottements

♡ En présence de frottements, on note f le coefficient de frottement entre l'objet et le support. Les lois de Coulomb s'écrivent:
- en présence de glissement on a $||\overrightarrow{T}|| = f||\overrightarrow{N}||$ (objet M bouge)
- en absence de glissement on a $||\overrightarrow{T}|| \leq f||\overrightarrow{N}||$ (à l'équilibre)

III. **Les lois de Newton**

Première loi de Newton: ou définition d'un réf. galiléen

♡ Il existe des référentiels dits galiléens par rapport auxquels tout système isolé ou pseudo-isolé a un mouvement rectiligne uniforme ou est à l'équilibre.

Un système est dit isolé lorsqu'il ne subit aucune force

Un système est dit pseudo isolé lorsqu'il subit des forces dont la résultante est nulle

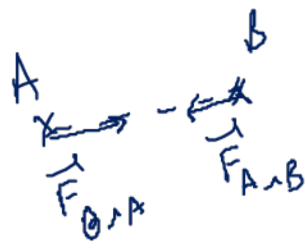
Deuxième loi de Newton aussi appelée relation fondamentale de la dynamique:

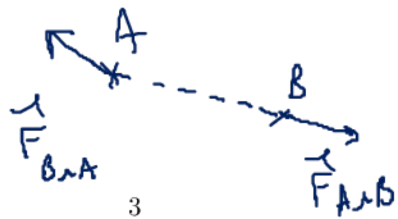
RFD (ou PFD): dans un référentiel galiléen on a $m\vec{a}(M)_R = \sum \vec{F}_{ext}$

Troisième loi de Newton aussi appelée principe des actions réciproques

Soit deux points matériels en interaction mutuelle on a $\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$ les forces colinéaires à $\overrightarrow{AB}$

cas attractif



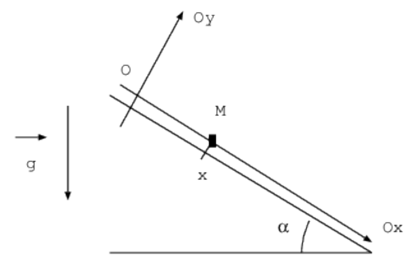


cas répulsif

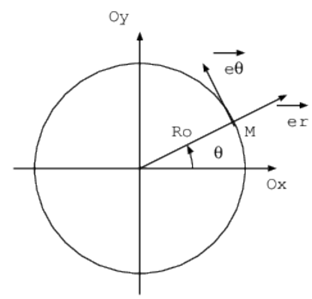
IV. Applications de la RFD

Pour tous ces exemples, on donne l'accélération du champ de pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

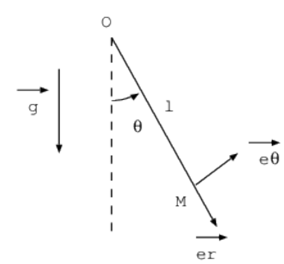
Exemple 1: soit un point matériel M de masse m sur un plan incliné qui fait un angle α par rapport à l'horizontale. Soit f le coefficient de frottement entre le point matériel et le plan incliné. Déterminer la condition sur α pour que le point matériel soit en équilibre sur le plan incliné. Lorsque cette condition n'est pas réalisée, le point matériel se met à glisser, il part de O sans vitesse initiale. Etablir l'expression de $x(t)$ en fonction de g, α, f et t.



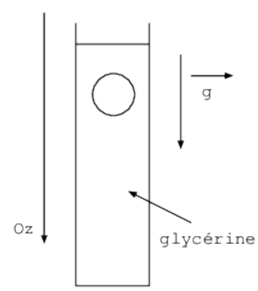
Exemple 2: un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon R_o autour de la Terre. On note M_T la masse de la Terre. Déduire de la RFD appliquée au satellite l'expression de la vitesse v_o du satellite sur son orbite ainsi que la période T_O de son mouvement. Exprimer l'énergie mécanique du satellite.



Exemple 3: soit un pendule simple de longueur l et de masse m. On tient compte des frottements de l'air $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)$ où h est une constante positive. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ en projetant la RFD sur une direction adéquate.



Exemple 4: une bille d'acier sphérique de rayon $R = 3,0\ mm$ est lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie de glycérine. On note Oz la verticale descendante. La bille subit la force de frottements fluide $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}(M)$ où η est la viscosité de la glycérine et $\overrightarrow{v}(M)$ la vitesse de la bille. Données: masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7600\ kg.m^{-3}$, masse volumique de la glycérine : $\rho_g = 1260\ kg.m^{-3}$



Montrer par un calcul numérique que l'on peut négliger la poussée d'Archimède devant la force poids. On écrit le vecteur vitesse sous la forme $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{e_z}$. Déduire de la RFD appliquée à la bille, l' équation différentielle vérifiée par $v(t)$. Préciser la constante de temps du régime transitoire et calculer la viscosité de la glycérine sachant que la vitesse limite atteinte par la bille est $v_l = 11,4\ cm.s^{-1}$.

V. **Energétique**

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel par: $E_c(M) = \frac{1}{2} m v(M)^2$

On définit l'énergie mécanique d'un point matériel par: $E_m(M) = E_c(M) + E_p(M)$

où il y a autant de termes dans l'énergie potentielle que ce qu'il y a de forces conservatives qui s'exercent sur M.

Vous devez savoir que:

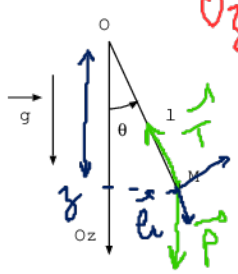
- le poids est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_{pp} = +mgz$ si Oz est vertical ascendant et $E_{pp} = -mgz$ si Oz est vertical descendant ‖ B
- la force de rappel élastique est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_{pr} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec l longueur du ressort et l_0 longueur à vide du ressort donnée par l'énoncé ‖ B

Dans les exemples qui suivent donner l'expression de l'énergie mécanique du point M de masse m.

$\vec{OM} = l\,\vec{e_r}$

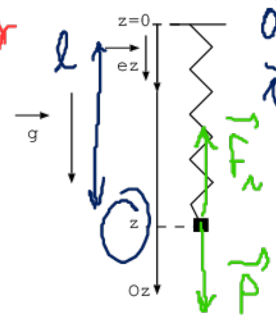
$\vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Oz vertical descendant



$\vec{OM} = z\,\vec{e_z}$

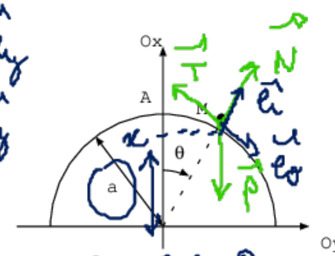
$\vec{v} = \dot{z}\,\vec{e_z}$



$\vec{OM} = a\,\vec{e_r}$

$\vec{v} = a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Ox vertical ascendant



$x = a\cos\theta$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2$

$E_p = - mgz = - mgl\cos\theta$

avec $z = l\cos\theta$

$E_m(M) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$

($\vec{T}$: n'est pas conservative)

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$

$E_p = - mgz + \frac{k}{2}(l - l_0)^2$

avec $l = z$

$E_m(M) = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mgz + \frac{k}{2}(z - l_0)^2$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$

$E_p = + mgx = mga\cos\theta$

$E_m = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} + mga\cos\theta$

($\vec{N}$ et $\vec{T}$ ne sont pas conservatives)

Il existe plusieurs formulations pour les théorèmes énergétiques, je ne vais parler dans ce rappel que de la forme la plus utile, à savoir le théorème de la puissance mécanique.

Théorème de la puissance mécanique:

B ‖ La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives qui s'exercent sur le système soit $\frac{dE_m}{dt} = P_{fnc}$. ‖ B

La puissance d'une force $\vec{F}$ exercée sur M s'écrit: $P^F = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$

Dans les forces non conservatives, vous trouverez:

- des forces qui sont perpendiculaires au mouvement (comme la tension du fil dans le pendule et la réaction normale au support), et dont la puissance est nulle) $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$
- toutes les forces de frottements dont la puissance est négative

$\vec{v}$ $\vec{F}$

$P_{fnc} < 0 \Rightarrow E_m \searrow$

Ce théorème sert:

- à trouver l'équation différentielle vérifiée par la variable qui caractérise le mouvement de M (voir exemples 3 et 5)

- à montrer que l'énergie mécanique d'un système conservatif est ...constante........ Un système conservatif ne subit que des forces conservatives et des forces perpendiculaires au mouvement $\Big\rangle \dfrac{dE_m}{dt} = 0$

Quand on a montré que l'énergie mécanique est constante, on utilise la conservation de l'énergie mécanique pour exprimer une vitesse ou une position à un instant t connaissant la position et la vitesse initiale (voir exemples 1,2 et 4).

$$\frac{d(u^2)}{dt} = 2u \times \frac{du}{dt}$$

D | *A savoir faire:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{z}^2\right) = \frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\,\dot{z} \times \ddot{z}$$

$u = \dot{z}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{ml^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{ml^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\,\dot{\theta} \times \ddot{\theta}$$

$u = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}(mgz) = mg\,\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{2}(\overset{x(t)}{x} - l_0)^2\right) = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(x(t) - l_0\right)^2\right) = \frac{k}{2}\,2\left(x(t) - l_0\right) \times \dot{x}$$

$u = x(t) - l_0$

Rappel: les autres théorèmes énergétiques

Théorème de l'énergie cinétique: $\Delta E_c(M)_{/R} = W_{A\to B}^{\vec{F}}$ (toutes les forces exercées sur M)

Théorème de l'énergie mécanique: $\Delta E_m(M)_R = W_{A\to B}^{\vec{F}_{n.c}}$ (forces non conservatives exercées sur M)

Théorème de la puissance cinétique: $\dfrac{dE_c}{dt}(M)_{/R} = \mathcal{P}^{\vec{F}}$ (toutes les forces exercées sur M)

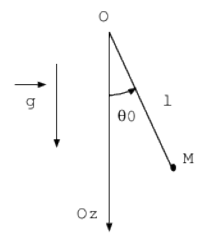
E_c → ttes les forces doivent être comptées

E_m → seules les forces non conservatives sont comptées (les forces conservatives dans l'E_p)

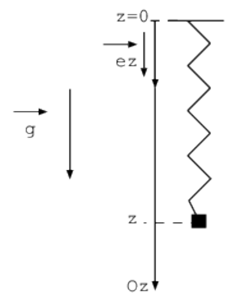
VI. Applications des théorèmes énergétiques

Exemple 1: soit un point matériel de masse m qu'on lance depuis le sol avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ verticale ascendante. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif et exprimer la hauteur maximale atteinte par le point matériel lorsqu'on néglige tout frottement et qu'on suppose que le champ de pesanteur est constant.

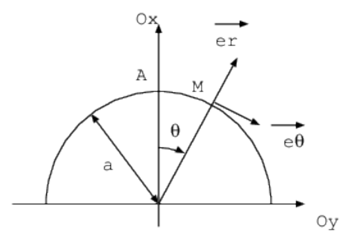
Exemple 2: soit un pendule simple de masse m et de longueur l. On néglige tout frottement. On écarte le pendule d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et on l'abandonne sans vitesse initiale. Montrer que le pendule est un système conservatif, exprimer la vitesse du pendule lorsqu'il arrive à la verticale.



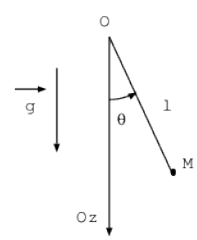
Exemple 3: soit un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de M par sa côte z (Oz verticale descendante). Etablir l'expression de l'énergie mécanique du point matériel et déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque on néglige tout frottement. La résoudre pour déterminer $z(t)$ lorsque le point matériel est abandonné sans vitesse initiale lorsque la longueur ressort est égale à sa longueur à vide. Indice: oscillateur harmonique.



Exemple 4: soit un point matériel M de masse m qui se déplace sur une demi-sphère de centre O et de rayon a. On néglige tout frottement. M est abandonné sans vitesse initiale depuis le haut de la sphère en A. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif, exprimer sa vitesse lorsqu'il est à la position repérée par θ. Déduire de la RFD la réaction du support lorsque le point matériel se trouve en θ. Indice : utiliser $\overrightarrow{a}(M) = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$



Exemple 5: soit un pendule simple de masse m et de longueur l. On note θ l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale. Le pendule subit une force de frottements fluide de la forme $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)$. Déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par θ.



VII. Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique se déduit de la seconde loi de Newton, c'est donc une autre formulation de la RFD. Ce théorème est particulièrement adapté pour l'étude du mouvement d'un point M qui a un mouvement circulaire de rayon R et de centre O.

Enoncé du théorème du moment cinétique:

♡ La dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M calculée par rapport à un point fixe O du référentiel d'étude $\mathcal{R}$ galiléen est égale à la somme des moments des forces exercées sur M et calculés par rapport à O.

On note:

$$\heartsuit \quad \left.\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

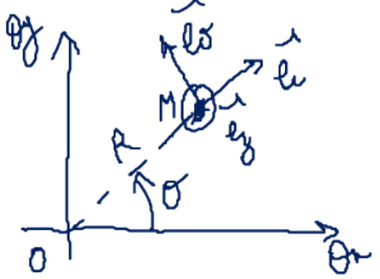
Ce théorème fait intervenir deux grandeurs physiques:

• Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un point O :

Sa définition :

$$\heartsuit \quad \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

Son expression en coordonnées polaires :



$$\vec{OM} = R\vec{e_r}$$

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = R\frac{d\vec{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = R\vec{e_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} = mR^2\dot{\theta}\vec{e_z}$$

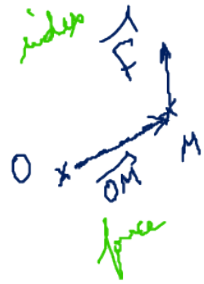
à savoir faire

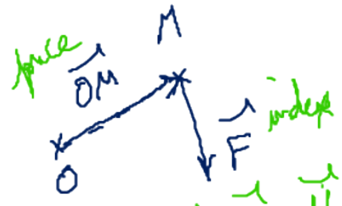
• Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée à M par rapport à un point O :

Sa définition :

$$\heartsuit \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

majeur — pouce — index (de la main droite)





♡ *Son sens physique* : le vecteur moment de la force $\vec{F}$ exercée sur M et calculé par rapport à O mesure la capacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner M autour de O. Le moment a pour sens et direction le ~~sens et la~~ direction du vecteur rotation provoquée par la force $\vec{F}$ quand elle fait tourner M autour de O. On utilise la règle de la main droite, on suit le sens de rotation de M (main droite du poignet vers le bout des doigts), le pouce donne le sens et la direction du moment.

ou règle du tire-bouchon

le bout des doigts — sens de rotation — poignet

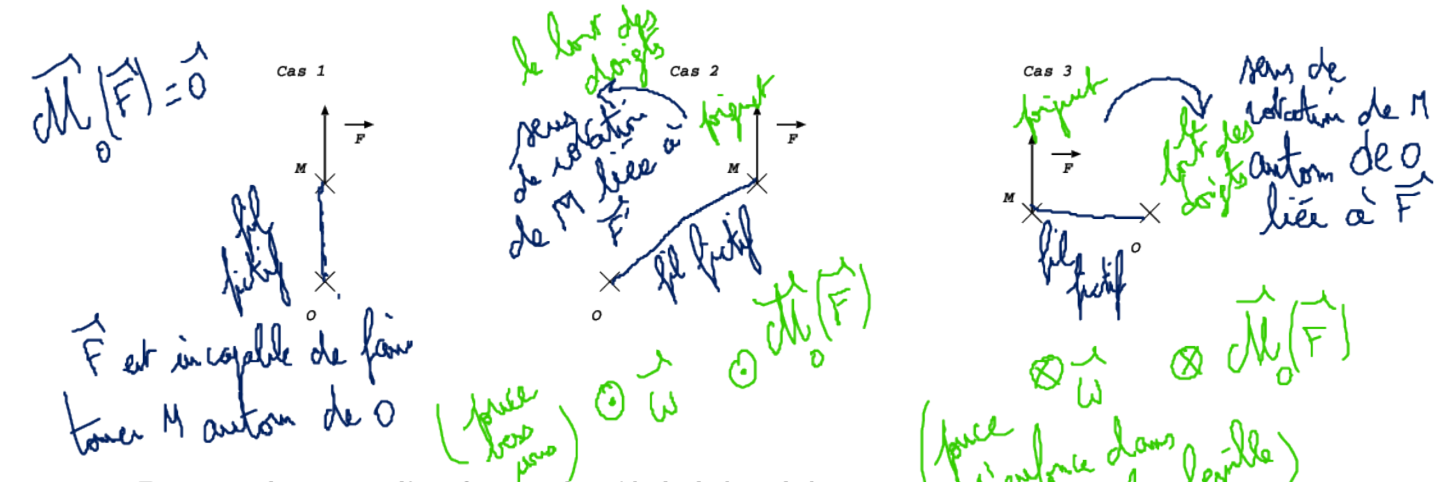
pouce vient vers nous ⊙

$\vec{\omega}$ vecteur rotation

poignet — sens de rotation — le bout des doigts

pouce s'enfonce dans la feuille ⊗

$\vec{\omega}$ vecteur rotation

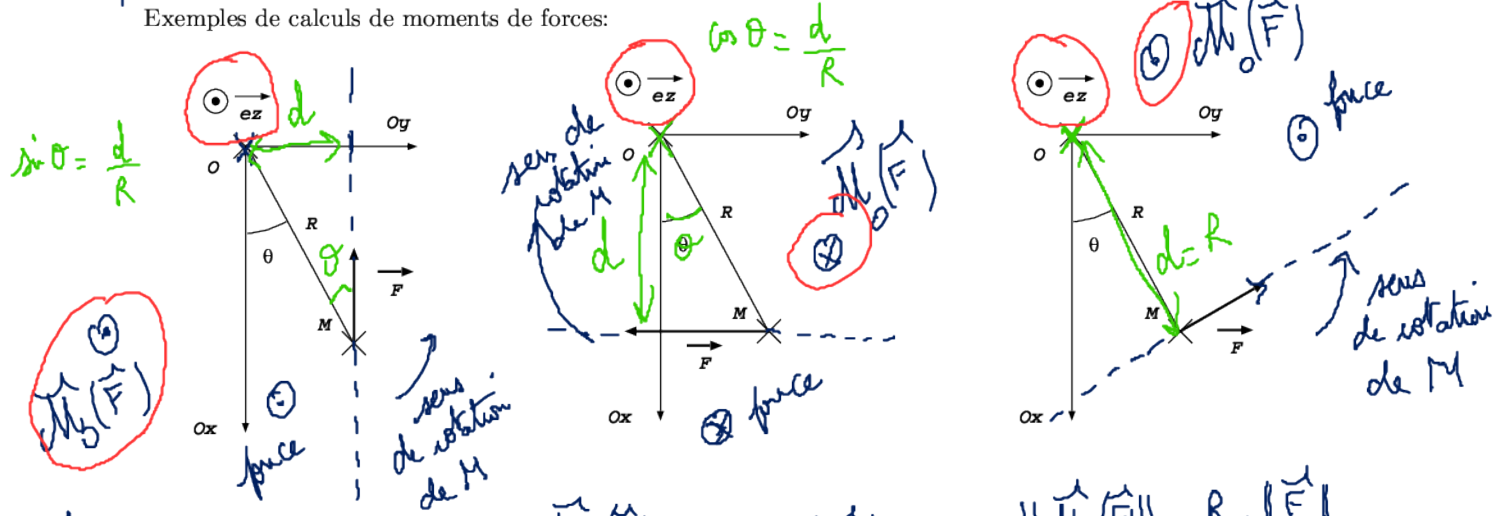


Expression du moment d'une force par la méthode du bras de levier
on cherche la norme du moment de la force puis le sens et la direction de ce moment.

Pour trouver la norme du moment: on trace la droite passant par M et de direction la force $\vec{F}$. On calcule d la distance minimale entre cette droite et le point O par rapport auquel on calcule le moment. La norme du moment est égale au produit $||\vec{F}||.d$.

Pour trouver le sens et la direction du moment: la force $\vec{F}$ fait tourner M autour de O. On utilise la règle de la main droite pour trouver le sens et la direction du moment.

Exemples de calculs de moments de forces:

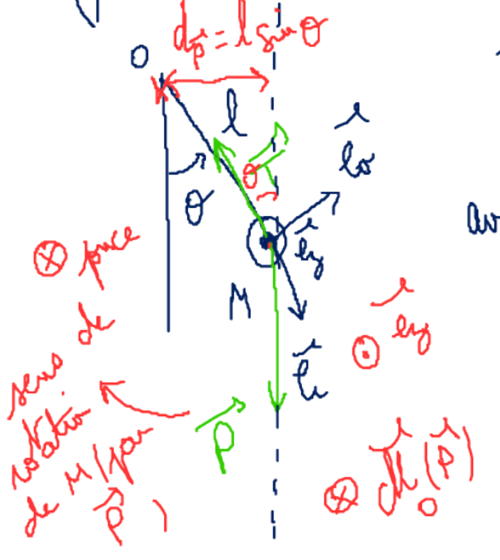


$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec F) = +d\,\|\vec F\|\,\vec e_z = +R\sin\theta\,\|\vec F\|\,\vec e_z$$

$$\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec F)\| = R\cos\theta\,\|\vec F\| \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec F) = -R\cos\theta\,\|\vec F\|\,\vec e_z$$

$$\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec F)\| = R\times\|\vec F\| \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec F) = +R\times\|\vec F\|\,\vec e_z$$

Application à l'équation du pendule simple en négligeant les frottements



$$\text{TMC} : \frac{d\vec L_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec P) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec T)$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec T) = \vec 0$ car $\vec T$ est incapable de faire tourner M autour de O

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec P) = -\,l\sin\theta \times mg\,\vec e_z$$

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_R = l\vec{e_r} \wedge m l\dot{\theta}\vec{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$$

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{e_z}$$

en remplaçant dans le TMC : $\cancel{m}l^2\ddot{\theta}\,\vec{e_z} = \vec{0} - \cancel{m}g l\sin\theta\,\vec{e_z}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

éq. diff. du pendule rigide

petits angles : $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

O.H. de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/l}$