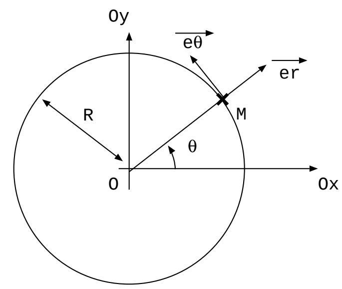
Questions de cours de mécanique

1. $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

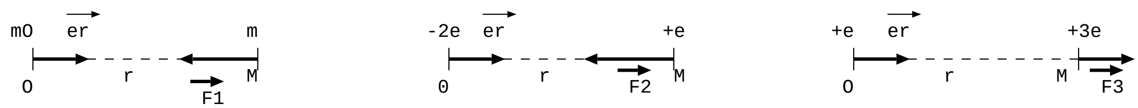
$\overrightarrow{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$



2. $\overrightarrow{F_1} = -\frac{\mathcal{G}m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$: force gravitationnelle attractive

$\overrightarrow{F_2} = \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$: force électrostatique attractive car les particules ont des charges des signes opposés

$\overrightarrow{F_3} = \frac{+3e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$: force électrostatique répulsive car les particules ont des charges de même signe



3. La force de rappel élastique est toujours de la forme $-k(l - l_0)\overrightarrow{u_{spire\ vers\ M}}$. On applique cela aux exemples donnés.

Exemple de gauche: la longueur du ressort est x et le vecteur unitaire des spires vers M est le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ donc $\overrightarrow{F} = -k(x - l_0)\overrightarrow{e_x}$.

Exemple de droite: pour le ressort du bas: la longueur du ressort est z et le vecteur unitaire des spires vers M est le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ donc $\overrightarrow{F} = -k_2(z - l_2)\overrightarrow{e_z}$.

pour le ressort du haut: la longueur du ressort est $a - z$ et le vecteur unitaire des spires vers M est le vecteur $-\overrightarrow{e_z}$ donc $\overrightarrow{F} = -k_1(a - z - l_1)(-\overrightarrow{e_z}) = k_1(a - z - l_1)\overrightarrow{e_z}$.

4. *Exemple de gauche:* M subit deux forces conservatives:

le poids d'énergie potentielle $E_{ppes} = +mgz$ (+ car Oz est vers le haut)

la force élastique d'énergie potentielle $E_{pelas} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$ avec ici $l = z$ (longueur du ressort)

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz\frac{k}{2}(z - l_0)^2$$

Exemple du milieu: M subit une force conservative: le poids, il subit également la réaction du support qui n'est pas conservative donc qui n'intervient pas dans l'énergie potentielle.

le poids d'énergie potentielle $E_{ppes} = -mgx$ ($-$ car Ox est vers le bas) avec $x = R\cos\theta$

$E_m = E_c + E_p = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR\cos\theta$ (ici $v = R\dot{\theta}$).

Exemple de droite: M subit deux forces conservatives: le poids et la force de rappel élastique et la réaction du support qui n'est pas conservative donc qui n'intervient pas dans l'énergie potentielle.

le poids d'énergie potentielle $E_{ppes} = +mgz$ (+ si on ptend Oz vers le haut) avec $z = x\sin\alpha$

la force élastique d'énergie potentielle $E_{pelas} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$ avec ici $l = x$ (longueur du ressort)

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx\sin\alpha$$

Si on néglige les frottements dans les trois cas, l'énergie mécanique est constante (car la réaction du support est perpendiculaire au mouvement et ne travaille pas).

5. Les lois de Coulomb pour le frottement solide s'écrivent:

$||\overrightarrow{T}|| \leq f_s||\overrightarrow{N}||$ quand M est à l'équilibre

$||\overrightarrow{T}|| = f_d||\overrightarrow{N}||$ quand M glisse

Souvent les coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d sont égaux.

6. Le théorème de la puissance mécanique s'écrit $\frac{dE_m}{dt} = P(\overrightarrow{F}_{non\ conservatives})$.

La puissance de la force $\overrightarrow{F}$ exercée sur M s'écrit $P(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(M)$.

La puissance d'une force frottements est toujours négative car la force de frottements est opposée au mouvement.

7. M subit son poids et la réaction normale au support, ces forces ne travaillent pas (leur puissance est nulle)

M subit la force de rappel élastique qui est conservative $E_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$

Le système a donc une énergie mécanique constante (la puissance des forces non conservatives est nulle), le système est conservatif.

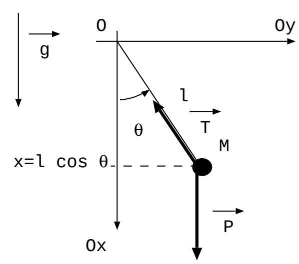
A l'instant initial, on abandonne M sans vitesse initiale lorsque le ressort est étiré d'une distance a soit $l = l_0 + a$ donc $E_m = E_c + E_p = 0 + \frac{k}{2}(l_0 + a - l_0)^2 = \frac{ka^2}{2}$.

A l'instant où le ressort a pour longueur $l = l_0$: $E_m = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}(l_0 - l_0)^2 = \frac{mv^2}{2}$.

On a donc $\frac{ka^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ soit $v = \sqrt{\frac{k}{m}}a$.

8. Le pendule subit son poids: force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_p = -mgx = -mgl\cos\theta$ ($-$ car Ox est vers le bas) et subit la tension du fil qui ne travaille pas donc le système est conservatif, son énergie mécanique est constante.

$E_m = E_c + E_p = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$ (car $v = l\dot{\theta}$)



On trouve l'équation différentielle vérifiée par θ en écrivant que $\frac{dE_m}{dt} = 0$ (la puissance des forces non conservative est nulle) soit:

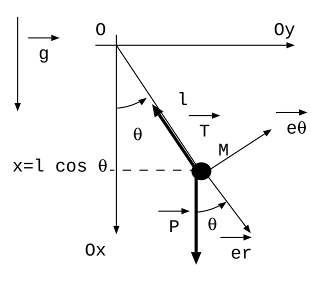
$\frac{d}{dt}(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}) - mgl\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$ soi $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\dot{\theta} = 0$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

Par la RFD: $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P}$

avec $\overrightarrow{a} = l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$

On projette sur $\overrightarrow{e_r}$: $-ml\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$: cette relation sert à trouver T

On projette sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $ml\ddot{\theta} = 0 - mg\sin\theta$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

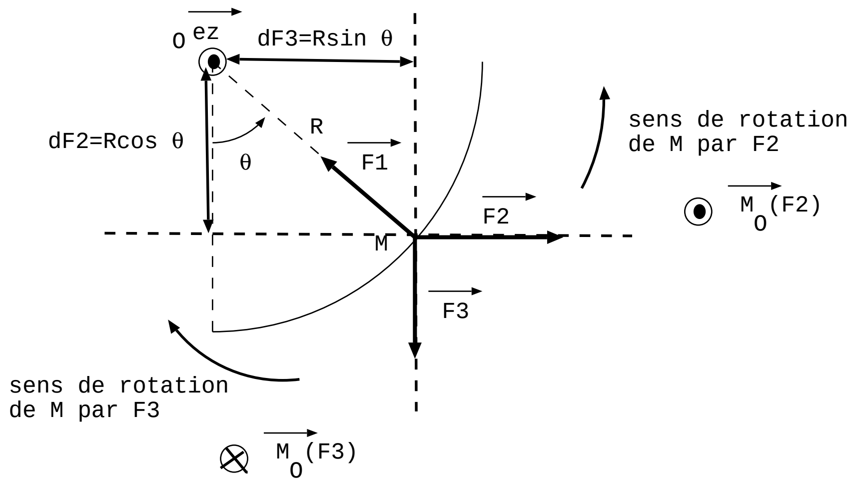


9. Définition du moment cinétique de M par rapport à O: $\overrightarrow{L}_0(M) = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v}$

Expression du moment cinétique de M par rapport à O en coordonnées polaires quand M décrit un cercle: $\overrightarrow{L}_0(M) = R\overrightarrow{e_r}\Lambda mR\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

10. Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F})$.

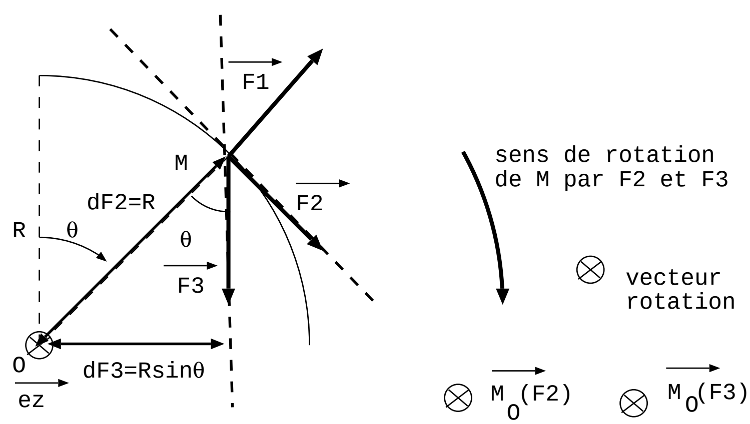
11.



$\overrightarrow{F_1}$ est incapable de faire tourner M autour de O donc $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_1}) = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_2}) = +R\cos\theta F_2 \overrightarrow{e_z}$

$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_3}) = -R\sin\theta F_3 \overrightarrow{e_z}$



$\overrightarrow{F_1}$ est incapable de faire tourner M autour de O donc $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_1}) = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_2}) = +RF_2 \overrightarrow{e_z}$

$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_3}) = +R\sin\theta F_3 \overrightarrow{e_z}$

12. Voir cours.