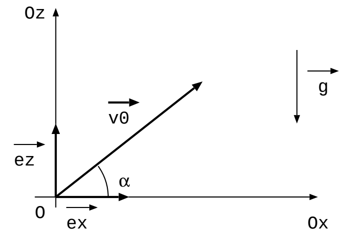
DM 1 de physique

Dans le champ de pesanteur uniforme $g = 9,8\ m.s^{-2}$, un volant de badminton de masse $m = 5,3\ g$ est lancé depuis le point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et un angle $\alpha = 60^0$ (par rapport à l'horizontale Ox). Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On étudie le mouvement du projectile dans le plan Oxz.



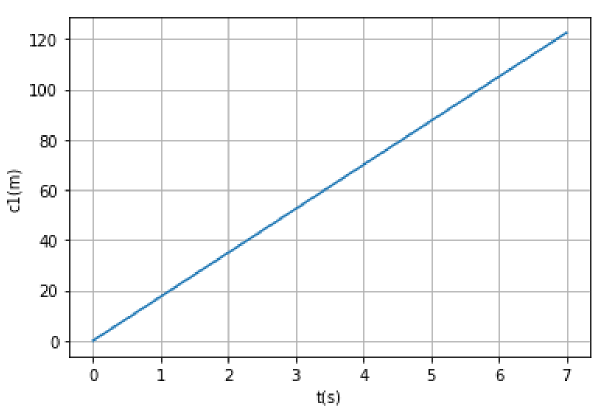
1. Dans cette question, on néglige tout frottement.

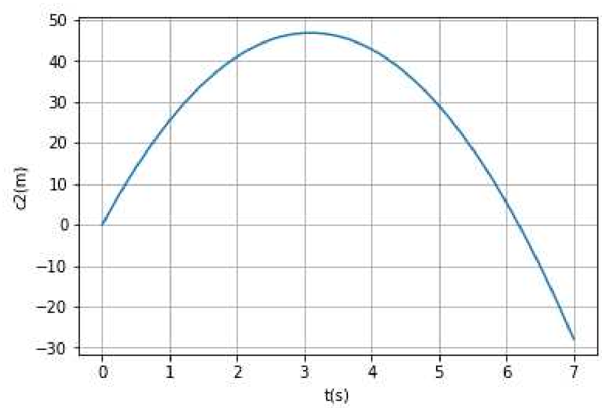
1.a. Déduire de la RFD appliquée au volant, les équations horaires du mouvement. En déduire l'équation de la trajectoire.

1.b. Exprimer la portée du tir (abscisse du point où tombe le projectile) en fonction de v_0 et α. En déduire la valeur de α et l'expression de la portée lorsque celle-ci est maximale.

1.c. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 alpha=60*np.pi/180
5 g=9.8
6 v0=.....
7
8 t=np.linspace(....,....,500)
9 plt.plot(t,v0*np.cos(alpha)*t)
10 plt.xlabel('t(s)')
11 plt.ylabel('c1(m)')
12 plt.grid()
13 plt.show()
14
15 plt.plot(t,-g*t**2/2+v0*np.sin(alpha)*t)
16 plt.xlabel('t(s)')
17 plt.ylabel('c2(m)')
18 plt.grid()
19 plt.show()
```

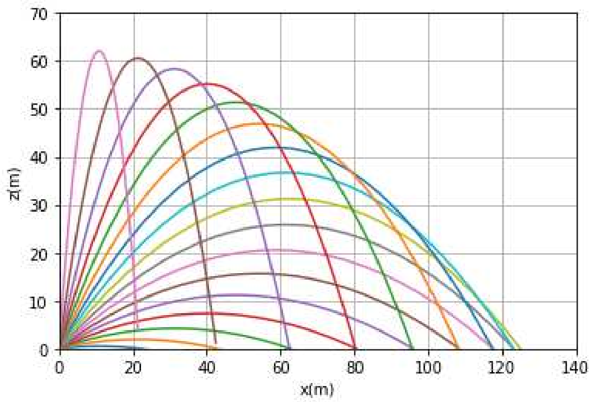




Compléter la ligne 8. Préciser l'unité de l'angle α sous python. Que représente $c1(t)$? $c2(t)$? Déduire des courbes, la portée de ce tir et en déduire la valeur numérique de v_0.

1.d.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g=9.8
5 v0=35
6
7 for i in range(1,18):
8     t=np.linspace(0,7,500)
9     plt.plot(v0*np.cos(i*5*np.pi/180)*t,-g*t**2/2+v0*np.sin(i*5*np.pi/180)*t)
10    plt.ylim(0,70)
11    plt.xlim(0,140)
12    plt.xlabel('x(m)')
13    plt.ylabel('z(m)')
14
15
16
17
18 plt.grid()
19 plt.show()
```



Le code précédent permet de tracer les trajectoires des projectiles pour une vitesse v_0 donnée et pour différentes valeurs de α.

Quelles sont en degrés les valeurs prises par α dans le code?

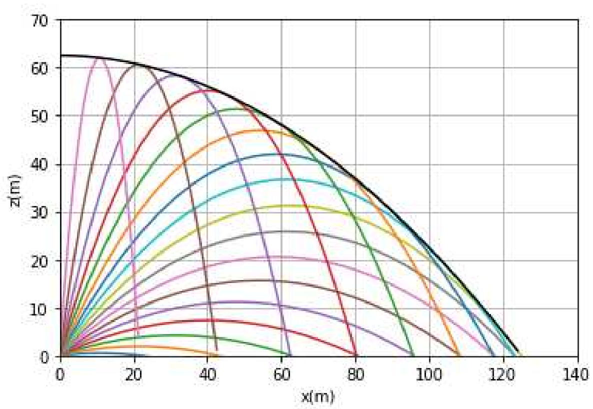
Quelle est la hauteur maximale d'une cible placée en $x = 100\ m$ pour qu'elle soit atteinte par un projectile?

Quelles sont les valeurs de α possibles pour atteindre une cible placée en $x = 70\ m$ et $z = 25\ m$?

1.e. Au code précédent, on ajoute les lignes 15 et 16 suivantes.

```
15 x=np.linspace(0,125,500)
16 plt.plot(x,v0**2/2/g-g*x**2/2/v0**2)
```

On obtient alors le graphe suivant:



Ces simulations montrent que pour une valeur données de v_0, quand on fait varier α, il existe une zone de l'espace où les cibles ne peuvent pas être atteintes. Ces cibles sont placées au-dessus d'une courbe appelée parabole de sûreté. Déduire du code l'équation de la parabole de sûreté.

1.f. Soit une cible de coordonnées (x_c, z_c) fixés et un projectile qui part avec une vitesse v_0 fixée et un angle α variable. Déduire de l'équation de la trajectoire d'un projectile, l'équation vérifiée par $\tan\alpha$. Rappel: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$. Déduire de cette étude, l'équation de la parabole de sûreté. Combien de valeurs de α sont possibles pour atteindre une cible en dessous de cette parabole? sur cette parabole?

Dans la suite, on tient compte des frottements de l'air exercés sur le projectile. La force de frottements s'écrit $\overrightarrow{f} = -mk||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$ où k est une constante.

2. Préciser l'unité de k. Exprimer $\overrightarrow{v}$ et $||\overrightarrow{v}||$ en fonction de $\dot{x}$, $\dot{z}$ et des vecteurs de base.

3. Déduire de la RFD appliquée au projectile, les expressions de $\ddot{x}$ et de $\ddot{z}$ en fonction de k, g, $\dot{x}$ et $\dot{z}$.

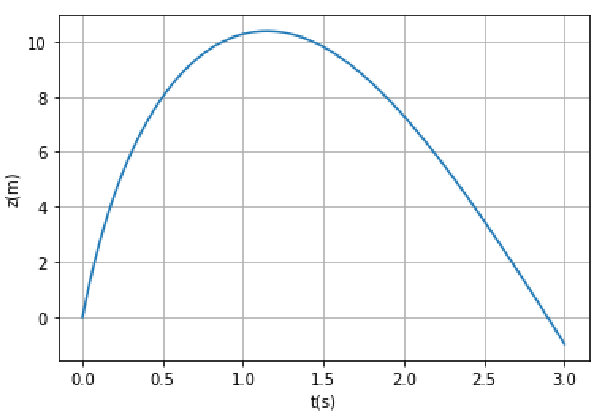
4. Pour résoudre ce système d'équations non linéaires, on utilise la méthode d'Euler. On note *tau* le pas de temps.

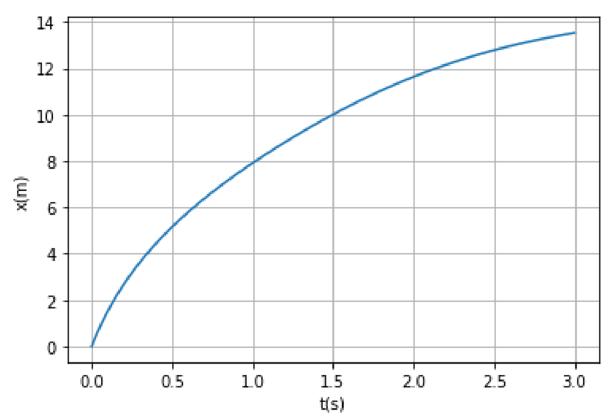
4.a. Donner l'expression approchée de $\dot{x}(t+tau)$ en fonction de $\dot{x}(t)$, tau et $\ddot{x}(t)$. Exprimer de même $\dot{z}(t+tau)$ en fonction de $\dot{z}(t)$, tau et $\ddot{z}(t)$.

4.b. Donner l'expression approchée de $x(t+tau)$ en fonction de $x(t)$, tau et $\dot{x}(t)$. Exprimer de même $z(t+tau)$ en fonction de $z(t)$, tau et $\dot{z}(t)$.

5. On donne le code suivant et le résultat de son exécution.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g=9.8
5 v0=35
6 k=0.1
7 alpha=np.pi/3
8 lt=[0]
9 lx,lz=[...],[....]
10 lvx,lvz=[.......],[........]
11 N=600
12 tau=........
13 for i in range(N):
14     lt.append(lt[i]+tau)
15     a1=-k*(lvx[i]**2+lvz[i]**2)**0.5*lvx[i]
16     a2=-k*(lvx[i]**2+lvz[i]**2)**0.5*lvz[i]-g
17     lvx.append(...............)
18     lvz.append(...............)
19     lx.append(...............)
20     lz.append(...............)
21
22 plt.plot(lt,lz)
23 plt.xlabel('t(s)')
24 plt.ylabel('z(m)')
25 plt.grid()
26 plt.show()
27
28 plt.plot(lt,lx)
29 plt.xlabel('t(s)')
30 plt.ylabel('x(m)')
31 plt.grid()
32 plt.show()
```





5.a. Lignes 9 et 10, on initialise les listes lx, lz, lvx et lvz qui correspondent aux variables $x(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$. Compléter les lignes 9 et 10.

5.b. Déduire des courbes la valeur numérique de tau.

5.c. Que représentent $a1$ et $a2$? Compléter les lignes 17 à 20.

5.d. Lire la portée du tir avec frottements.