Correction de l'interrogation de rentrée 2024

I. Energie mécanique

1. M subit son poids qui est une force conservative, d'énergie potentielle $E_{ppes} = -mgz$ ($-$ car E_{ppes} doit augmenter quand on monte soit ici quand z diminue).

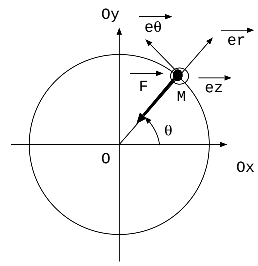
M subit la force de rappel élastique qui est une force conservative, d'énergie potentielle $E_{pel} = \frac{k}{2}(l-l_0)^2 = \frac{k}{2}(z-l_0)^2$.

L'énergie mécanique est $E_m = \frac{mv^2}{2} + E_p = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz + \frac{k}{2}(z-l_0)^2$.

2. On néglige les frottements donc le système est conservatif, l'énergie mécanique est constante et donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ soit:

$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k(z-l_0)\dot{z}$ d'où $\ddot{z} + \frac{kz}{m} = g + \frac{kl_0}{m}$.

II. Mouvement circulaire



1. Position: $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$

Vitesse: $\overrightarrow{v}(M) = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Accélération: $\overrightarrow{a}(M) = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$ qui s'écrit aussi en remplaçant v par $\frac{\dot{\theta}}{R}$: $\overrightarrow{a}(M) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$.

2. Le satellite subit la force gravitationnelle attractive $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}\overrightarrow{e_r}$.

2.a. La RFD appliquée au satellite s'écrit $m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{F}$ soit $m(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} - m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}\overrightarrow{e_r}$.

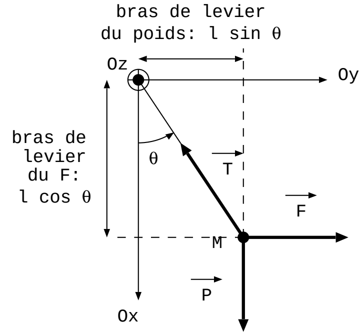
On projette selon $\overrightarrow{e_\theta}$: $\frac{dv}{dt} = 0$ donne que la vitesse est constante

On projette selon $\overrightarrow{e_r}$: $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R}}$.

Le satellite décrit un cercle à vitesse constante, la période du mouvement est égale à la distance parcourue sur une période (soit $2\pi R$: périmètre du cercle) divisée par la vitesse d'où $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M_T}}$.

2.b. L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie potentielle $E_p = \frac{-\mathcal{G}M_T m}{R}$ et de son énergie cinétique $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2R}$. Soit $E_m = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2R} + \frac{-\mathcal{G}M_T m}{R} = \frac{-\mathcal{G}M_T m}{2R}$.

III. Pendule



1. La tension du fil ne peut pas faire tourner M autour de O donc son moment est nul. Soit $\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$.

Le poids fait tourner M dans le sens opposé à θ donc le moment associé est selon $-\overrightarrow{e_z}$. Le bras de levier du poids est $l\sin\theta$. Soit $\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin\theta\overrightarrow{e_z}$.

$\overrightarrow{F}$ fait tourner M dans le sens de θ donc le moment associé est selon $+\overrightarrow{e_z}$. Le bras de levier est $l\cos\theta$. Soit $\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}) = +Fl\cos\theta\overrightarrow{e_z}$.

2. Le moment cinétique de M par rapport à O s'écrit $\overrightarrow{L}_O(M) = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{e_r}\Lambda ml\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

3. Le théorème du moment cinétique de M par rapport à O s'écrit $\dfrac{d\overrightarrow{L}_O(M)}{dt} = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F})$ soit $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + Fl\cos\theta$.

4.

4.a. Aux petits angles, l'équation différentielle devient $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta + Fl$ soit $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = \dfrac{F}{ml}$.

Par identification $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ et $\omega_0^2\theta_e = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\theta_e = \dfrac{F}{ml}$ d'où $\theta_e = \dfrac{F}{mg}$.

4.b. On reconnaît l'équation différentielle d'un OH de pulsation ω_0. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

La solution particulière est θ_e (on la trouve en faisant $\ddot{\theta} = 0$ soit $\omega_0^2\theta = \omega_0^2\theta$ et $\theta = \theta_e$).

D'où $\theta(t) = \theta_e + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, on trouve A et B avec les CI:

$\theta(t=0) = 0 = \theta_e + A$

$\dot{\theta}(t=0) = 0 = B\omega_0$ ($v = l\dot{\theta}$ impose $\dot{\theta}(t=0) = 0$ car $v(t=0) = 0$).

On a donc $\theta(t) = \theta_e + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. ($\cos(\omega_0 t)$ varie entre -1 et $+1$ donc cette fonction varie entre 0, pour $\cos(\omega_0 t) = +1$) et $2\theta_e$, pour $\cos(\omega_0 t) = -1$).