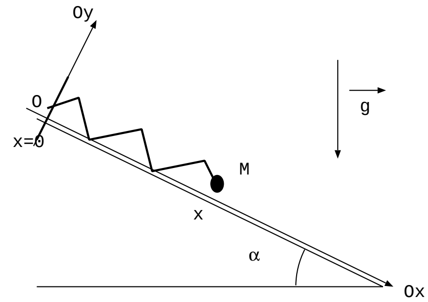
TD 1 capacités numériques

I. Ressort sur un plan incliné

Un point matériel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un ressort posé sur un plan incliné qui fait un angle α par rapport à l'horizontale. On note k la constante de raideur et l_0 la longueur à vide du ressort. On néglige tout frottement. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

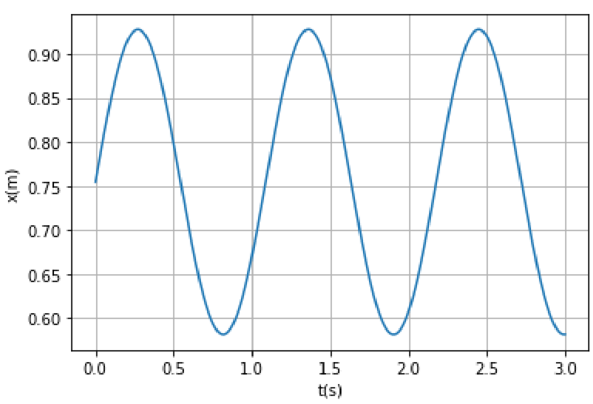


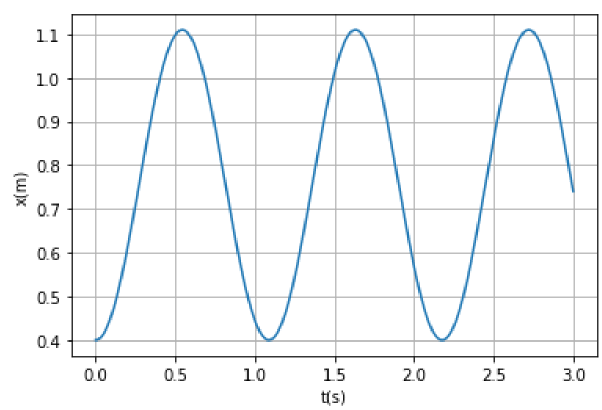
1. Déduire de la RFD l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, l'abscisse de M. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$. Exprimer ω_0 et x_e en fonction des données. Que représentent ces deux grandeurs physiques?

2. Les conditions initiales sont données par $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$. Exprimer $x(t)$.

3. On donne le code et le résultat de son exécution pour des conditions initiales (lignes 7 et 8) différentes.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g,m,l0,k,alpha=9.8,0.3,.....,.....,np.pi/3
5 omega0=.....................
6 xe=........................
7 x0=..........
8 v0=...........
9 A,B,C=.........,..........,.........
10
11 t=np.linspace(.....,....,500)
12 plt.plot(t,A*np.cos(omega0*t)+B*np.sin(omega0*t)+C)
13 plt.grid()
14 plt.xlabel('t(s)')
15 plt.ylabel('x(m)')
16 plt.show()
```





3.a. Compléter les lignes 5,6 et 9.

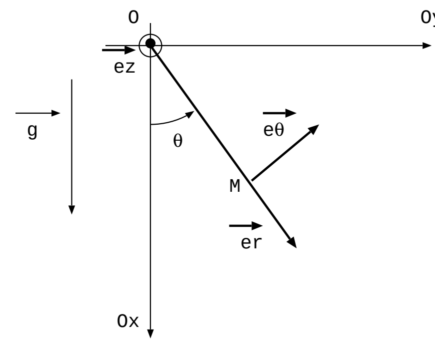
3.b. Déduire des courbes la valeur numérique de x_e et de ω_0. En déduire les valeurs numériques de k et l_0. Compléter la ligne 4.

3.c. Déduire des courbes, les valeurs numériques de x_0 et v_0 (lignes 7 et 8).

Réponses: 1- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *et* $x_e = l_0 + \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$ *3-* $k = 10\ N/m$, $l_0 = 0,5\ m$, $x0 = 0,76\ m$ *et* $v0 = 1\ m/s^{-1}$, $x_0 = 0,4\ m$ *et* $v_0 = 0\ m.s^{-1}$

II. **Pendule avec frottement**

Soit un pendule simple de longueur l et de masse m suspendu au point O. Ce pendule subit la force de frottements $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}$ où h est une constante positive. On repère le pendule par ses coordonnées polaires. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.



1. Préciser l'unité de h.

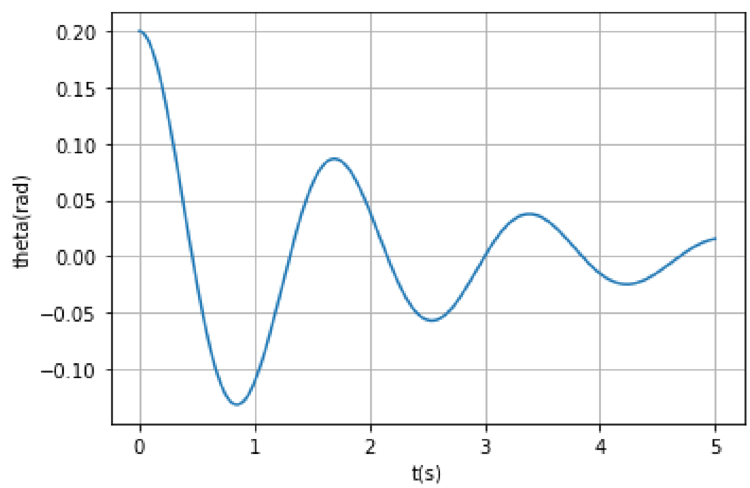
2. Exprimer le moment des forces de frottements par rapport à O en utilisant l'expression du moment faisant intervenir le produit vectoriel.

3. Exprimer par la méthode des bras de levier le moment des autres forces par rapport à O.

4. Déduire du théorème du moment cinétique que θ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ aux petits angles. Exprimer ω_0 et Q en fonction des données et donner les unités et le nom de ces deux grandeurs physiques.

5. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g,l=9.8,0.7
5 omega0=...............
6 h=1.
7 Q=................
8
9 lt=[0]
10 ltheta=[......]
11 lthetapoint=[...........]
12 dt,N=0.001,..........
13
14 for i in range(N):
15     lt.append(lt[i]+dt)
16     a=....................................
17     lthetapoint.append(lthetapoint[i]+a*dt)
18     ltheta.append(ltheta[i]+lthetapoint[i]*dt)
19
20 plt.plot(lt,ltheta)
21 plt.xlabel('t(s)')
22 plt.ylabel('theta(rad)')
23 plt.grid()
24 plt.show()
```



5.a. Compléter les lignes 5,7,10 et 11.

5.b. On note dt le pas de temps, exprimer de façon approchée $\dot{\theta}(t+dt)$ et $\theta(t+dt)$ en faisant un DL à l'ordre 1 en dt.

Que représente a dans le code ligne 16? Compléter la ligne 16.

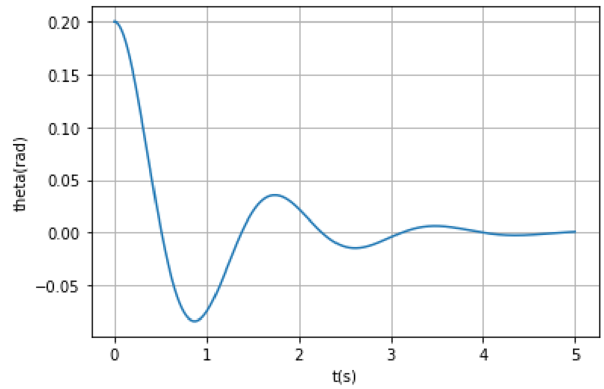
5.c. Quel nom porte le régime observé? Lire sur la courbe la valeur numérique de la pseudo-période. En déduire la pseudo pulsation et la comparer avec la pulsation propre ω_0.

5.d. Déduire de la courbe, la valeur numérique de N, ligne 12.

5.e. On rappelle la définition du décrément logarithmique $\delta = \ln(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)})$ où T est la pseudo période. Déduire de la courbe la valeur numérique de δ.

On donne $\delta = \dfrac{\pi}{Q}$. En déduire la valeur numérique de Q et la valeur numérique de h. Vérifier la cohérence avec le code.

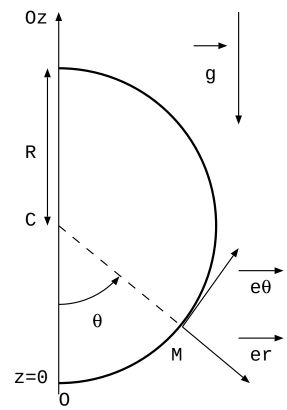
6. On donne la courbe $\theta(t)$ pour une valeur différente de h. A-t-on pris une valeur de h plus grande ou plus petite que dans la simulation précédente? Justifier. Calculer δ, puis Q et en déduire h.



Réponses: 4- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ *et* $Q = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{l}}$ *5-* $N = 5000$, $\delta = 0,8$, $Q = 3,9$, $h = 0,95$ *SI 6-* $h = 2$ *SI*

III. **Looping**

Un mobile assimilé à un point matériel M de masse m se déplace à l'intérieur d'un rail circulaire de rayon R et de centre C. On néglige les frottements. Le mobile a une vitesse v_0 en O (point le plus bas du cercle placé en $z = 0$). Le référentiel d'étude est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical ascendant et on repère M par l'angle θ.



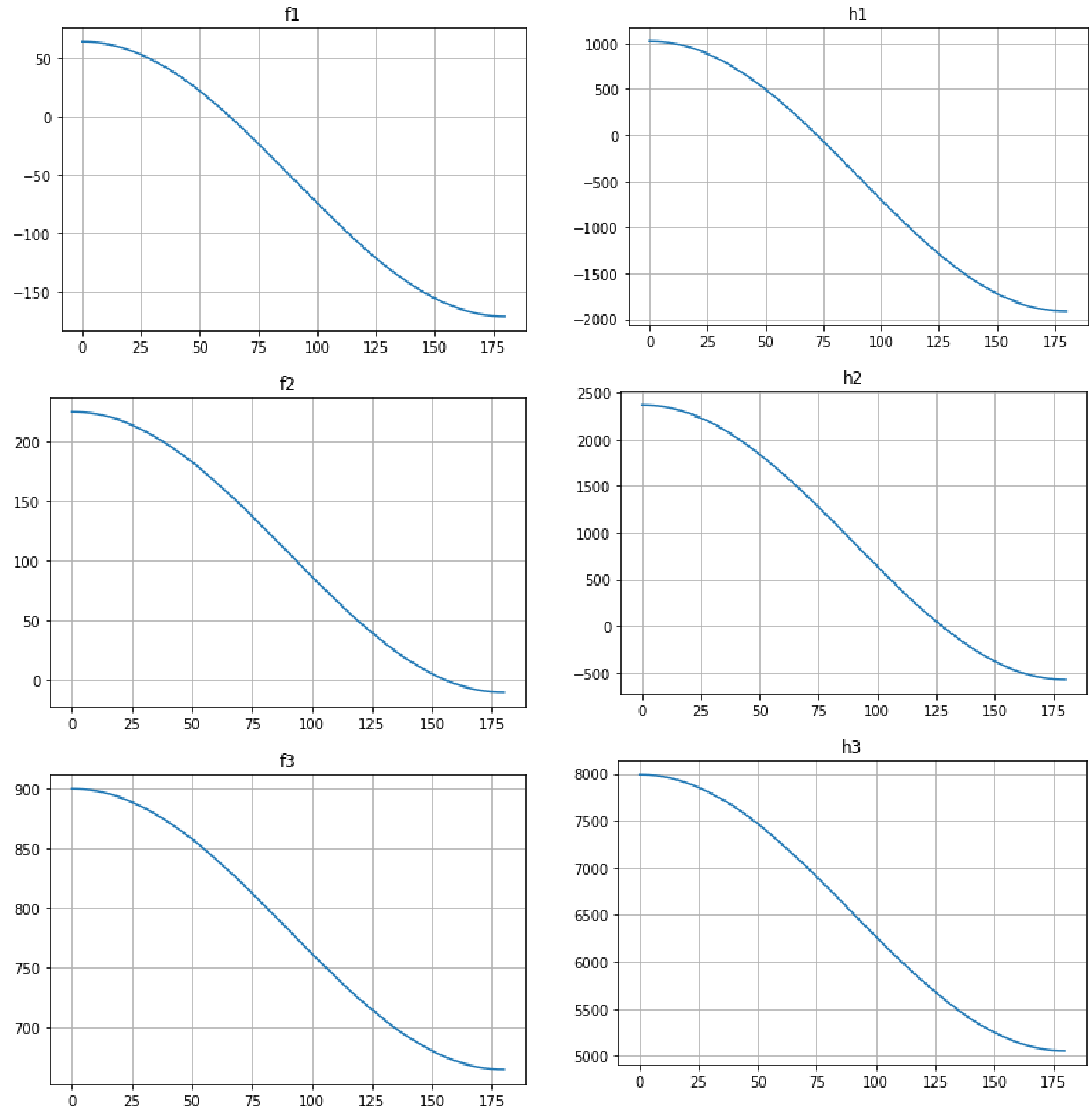
1. Exprimer l'énergie mécanique de M. Montrer qu'elle est constante et en déduire l'expression de la vitesse v au point M repéré par θ.

2. Déduire de la RFD appliquée à M que la réaction du rail sur le mobile s'écrit $N = \dfrac{mv_0^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2)$.

3. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g,R,m=9.8,6,50

def f(v0,theta):
   return v0**2-2*g*R*(1-np.cos(theta*np.pi/180))

def h(v0,theta):
    return m*v0**2/R+m*g*(3*np.cos(theta*np.pi/180)-2)

theta=np.linspace(....,....,1000)
plt.plot(theta,f(c1,theta))
plt.grid()
plt.title('f1')
plt.show()

plt.plot(theta,h(c1,theta))
plt.grid()
plt.title('h1')
plt.show()
```

```
plt.plot(theta,f(c2,theta))
plt.grid()
plt.title('f2')
plt.show()

plt.plot(theta,h(c2,theta))
plt.grid()
plt.title('h2')
plt.show()

plt.plot(theta,f(c3,theta))
plt.grid()
plt.title('f3')
plt.show()

plt.plot(theta,h(c3,theta))
plt.grid()
plt.title('h3')
plt.show()
```



3.a. Que représentent les fonctions f et h?

3.b. Compléter la ligne 12 et donner les valeurs numériques de c1, c2 et c3.

3.c. Dans les trois cas étudiés, déduire des courbes le mouvement du mobile. Préciser si le mobile peut arriver tout en haut du rail pour effectuer un looping.

Réponses: 1- $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$ *2-* $c1 = 8$, $c2 = 15$ *et* $c3 = 30$