Partie I : balançoire

1) Dans le référentiel terrestre galiléen, l'enfant subit son poids qui est conservatif et la tension du fil qui ne travaille pas donc le système est conservatif.

Son énergie potentielle est celle du poids : $E_p = -mgx = -mgl\cos\theta$.

Son énergie mécanique s'écrit $E_m = m\frac{v^2}{2} + E_p = m\frac{l^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$, elle est constante.

On obtient l'équation différentielle vérifiée par θ en écrivant :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{ml^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{2} + mgl\sin\theta\,\dot{\theta}$$

soit $ml^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0$ avec $\sin\theta \simeq \theta$ dans l'approximation des petits angles

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

soit de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ d'où $\boxed{l = g\frac{T_0^2}{4\pi^2}}$ AN : $T_0 = \frac{45}{10} = 4,5\,s$

$l = 5\,m$

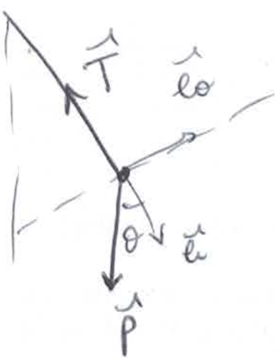
---

2) Analyse dimensionnelle :

$$[h] = \left[\frac{f}{mv}\right] = \frac{kg\,ms^{-2}}{kg\,ms^{-1}} = s^{-1}$$

---

3)



direction de $\vec{f} = -mh\vec{v}$

$= -ml\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

la RFD appliquée à M dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit, $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$

avec $\vec{OM} = l\vec{e_r}$ $\quad \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\quad \vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

on projette sur $\vec{e_\theta}$: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - mlh\dot{\theta}$

d'où $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

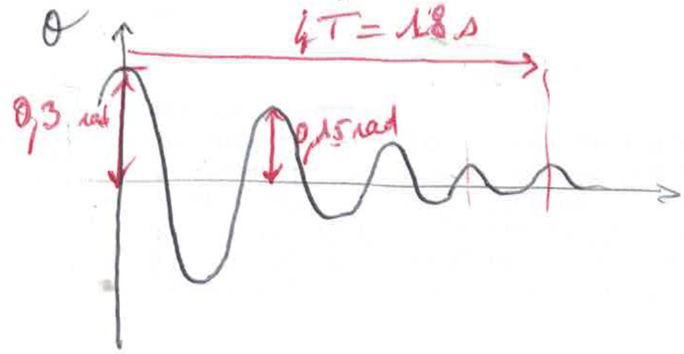
soit aux petits angles : $\boxed{\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

par identification : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ et $\omega_0 2\xi = h$ soit $\xi = \frac{h}{2\omega_0} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$

---

4) On observe un régime pseudo-périodique qui correspond à un discriminant négatif dans l'équation caractéristique : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

soit $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$ pour $\boxed{\xi < 1}$



$\underline{T} = \frac{18}{4} \simeq \underline{4{,}5\ s}$

$\underline{\delta} = \ln\left(\frac{0{,}3}{0{,}15}\right) = \ln 2 = \underline{0{,}7}$

---

5) Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 + j\,\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$$r_2 = -\xi\omega_0 - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 - j\,\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$\theta(t)$ s'écrit donc : $\boxed{\theta(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\xi\omega_0 t}\,\cancel{(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}}{e^{-\xi\omega_0 (t+T)}\,\underbrace{\cancel{(A\cos(\omega(t+T)) + B\sin(\omega(t+T)))}}_{\text{fonction périodique de période } T}}\right) = \ln\left(e^{\xi\omega_0 T}\right) = \xi\omega_0 T}$$

---

6) On a donc : $\boxed{\xi = \frac{\delta}{\omega_0 T} = \frac{\delta}{\frac{2\pi}{T_0}\times T} = \frac{0{,}7}{\frac{2\pi}{\cancel{4{,}5}}\times\cancel{4{,}5}} = 0{,}11}$

T_0 : période propre calculée question 1

et $\boxed{h = 2\omega_0\xi} = 2\,\frac{2\pi}{T_0}\,\xi = 2\times\frac{2\pi}{4{,}5}\times 0{,}11 = \underline{3{,}1.10^{-2}\ s^{-1}}$

$2\xi\omega_0\dot\theta$ est de la même unité que $\ddot\theta$ soit :

$$[\xi\omega_0\dot\theta] = [\ddot\theta] \text{ ou } [\xi] = \left[\frac{\ddot\theta}{\omega_0\dot\theta}\right] = \frac{[d^2\theta/dt^2]}{[\omega_0\times d\theta/dt]} = \frac{rad.s^{-2}}{rad.s^{-1}.\ rad.s^{-1}} = 1$$

ξ est sans unité

7) 3 m, g, l, h = 20, 9.8, 5, 0.031

4 omega0 = (g/l)**0.5

5 xi = h/(2*omega0)

6 omega = omega0 * (1 - xi**2)**0.5

7 theta0 = 0.3 (on lit cette valeur $\theta(t=0)$ sur la courbe)

8 t = np.linspace(0, 23, 1000) (la courbe est tracée entre t=0 s et t=23

9 theta = np.exp(-xi * omega0 * t) * (...

12 plt.xlabel('t(s)')

13 plt.ylabel('theta (rad)')

---

8) 15 b = [0] # on crée une liste avec 1 seul élément 0

16 for i in range(len(t)-1): # i=0, i=1, ... i = len(t)-2

17 —— b.append((theta[i+1]-theta[i])/(t[i+1]-t[i]))

on complète la liste b par les termes de la forme $\dfrac{\theta(t_{i+1})-\theta(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = \dfrac{d\theta}{dt}$: cela représente la dérivée de θ / au temps soit $\dot{\theta}$

18 en abscisse on met le temps t
en ordonnée on met $-mgl\cos\theta = E_p$

21 en abscisse on met le temps t
en ordonnée on met $m\dfrac{l^2 b^2}{2} = m\dfrac{l^2\dot{\theta}^2}{2} = m\dfrac{v^2}{2} = E_c$.

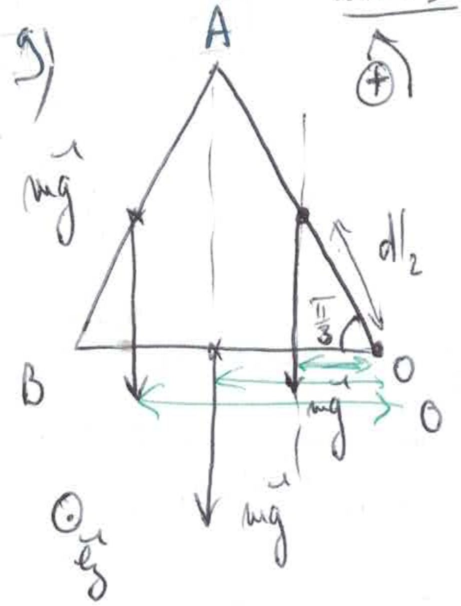
La courbe 2 est toujours positive, c'est $E_c(t)$
La courbe 3 est toujours négative, c'est $E_p(t)$ qui tend vers -980 J or quand $t \to \infty$: $\theta \to 0$ donc $E_p = -mgl$

$= -20 \times 9{,}8 \times 5$

$= -980$ J

Partie II : Stabilité d'une balançoire

9)



Moment du poids de la barre OA par rapport à O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{OA}) = + mg \times \underbrace{\frac{d}{2}\cos\frac{\pi}{3}}_{\text{bras de levier de } \vec{P}_{OA}} \vec{e_z} = mg\frac{d}{4}\vec{e_z}$$

$\vec{P}_{OA}$ fait tourner la barre OA dans le sens trigo selon $+\vec{e_z}$

Moment du poids de la barre OB par rapport à O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{OB}) = + mg \times \underbrace{d\cos\frac{\pi}{3}}_{\text{bras de levier}} \vec{e_z} = mg\frac{d}{2}\vec{e_z}$$

$\vec{P}_{OB}$ fait tourner la barre OB autour de O selon $(+Oz)$

Moment du poids de la barre AB par rapport à O :

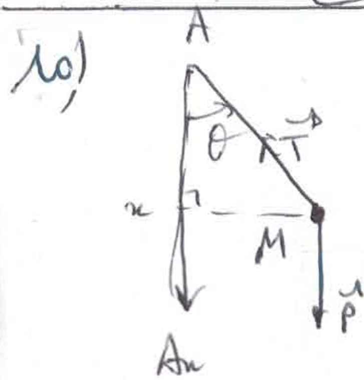
$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{AB}) = + mg \times \left(d\cos\frac{\pi}{3} + \frac{d}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z} = 3mg\frac{d}{4}\vec{e_z}$$

$\vec{P}_{AB}$ fait tourner la barre AB autour de O selon (Oz)

d'où $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mg\,d\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\vec{e_z} = mg\frac{3d}{2}\vec{e_z}}$

---

10)



M subit dans R galiléen :

- son poids : force conservative d'énergie potentielle $E_p = -mgx = -mg\,l\cos\theta$
- la tension du fil qui ne travaille pas car elle est perpendiculaire au mouvement

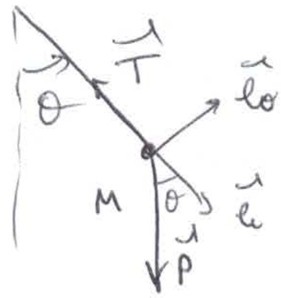
donc le système est conservatif.

On applique la conservation de l'énergie entre le point où l'amplitude des oscillations est maximale : $v=0$ et $\theta=\theta_m$ et le point M quelconque

soit $E_m = \frac{mv^2}{2} - mgl\cos\theta = 0 - mgl\cos\theta_m$

d'où $\boxed{v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_m)}}$

11)



La RFD appliquée à M dans le réf d'étude galiléen s'écrit : $m_0 \vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{T}$

avec $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \dfrac{v^2}{l}\vec{e}_r$

en projection sur $\vec{e}_r$ (pour trouver $\|\vec{T}\|$) on a :

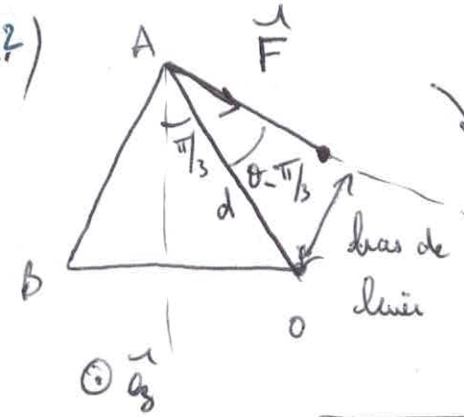
$$-m_0 \frac{v^2}{l} = m_0 g \cos\theta - \|\vec{T}\|$$

soit $\|\vec{T}\| = m_0 g \cos\theta + m_0 \dfrac{v^2}{l} = m_0 g\cos\theta + m_0 2g(\cos\theta - \cos\theta_m)$

$$\boxed{\|\vec{T}\| = m_0 g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_m)}$$

---

12)



sens de rotation de A autour de O provoquée par $\vec{F}$

$\otimes\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = -\underset{\|\vec{T}\|}{\underset{\shortparallel}{\|\vec{F}\|}} \times \underbrace{d\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{bras de levier}} \vec{e}_z$$

d'où $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = -m_0 g d\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_m)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\vec{e}_z}$

---

13) La courbe donnée représente la norme du moment de la réaction de la corde en A calculé par rapport à O pour $m_0 = 40$ kg, $\theta_m = 80°$ et d = 4. Ce moment fait basculer la balançoire et la fait décoller du sol alors que le moment du poids du bâti maintient le bâti sur le sol. Pour que le bâti ne décolle pas il faut que le moment du poids du bâti soit plus grand que le moment de $\vec{F}$ soit $\underset{\frac{3mgd}{2}}{\underset{\shortparallel}{\|\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})\|}} > \mathcal{M}_{max} = 3100$ Nm

d'où $\boxed{m > \mathcal{M}_{max} \times \dfrac{2}{3gd}} = 3100 \times \dfrac{2}{3 \times 9{,}8 \times 4} = \boxed{52{,}7\ \text{kg}}$

Le moment de $\vec{F}$ est proportionnel à m_0 donc pour $m_0 = 40$ kg $\mathcal{M}_{max} = 3100$ Nm et pour $m_0 = 100$ kg, $\mathcal{M}_{max} = \dfrac{3100}{40} \times 100 = 7750$ Nm. On en déduit $m > \dfrac{7750 \times 2}{3 \times 9{,}8 \times 4}$

soit $\boxed{m > 132\ \text{kg}}$