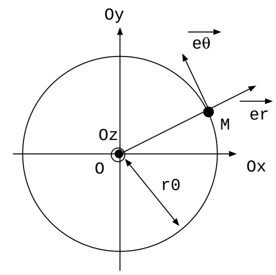
DS1 de physique

Le sujet comprend deux problèmes indépendants, vous les traiterez dans l'ordre de votre choix. Tout résultat doit être justifié, lorsque vous appliquez une loi, il est indispensable d'indiquer son nom et les hypothèses d'application.

I. Base de lancement d'une fusée

Une fusée de masse m est assimilée à un point matériel M. La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6\ 400\ km$, de centre O et de masse M_T. On note $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel géocentrique centré sur O (barycentre de la Terre) et dont les axes sont fixes et dirigés selon trois étoiles lointaines. **Ce référentiel est supposé galiléen**. Données: $R_T = 6400\ km$, constante de gravitationnelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$, $m = 4,0.10^5\ kg$ et $M_T = 5,97.10^{24}\ kg$.

1. La fusée est sur une orbite circulaire de rayon r_0. On repère sa position par les coordonnées polaires. La fusée ne subit qu'une seule force de la forme $\overrightarrow{F} = -\dfrac{K}{r_0^2}\overrightarrow{e_r}$. Donnée: $r_0 = 80,0.10^6\ m$.

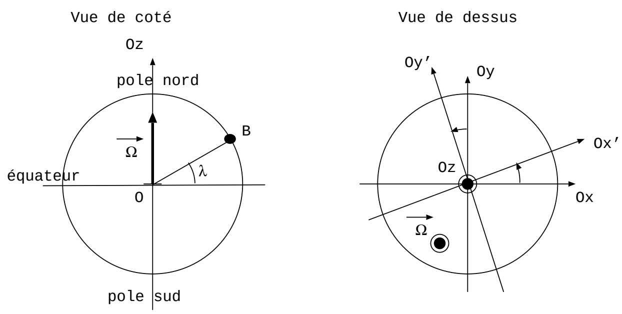


1.a. Préciser l'origine de cette force et donner l'expression de K.

1.b. Etablir l'expression de v_0, la norme de la vitesse de la fusée dans le référentiel géocentrique. Faire l'application numérique de v_0 en $m.s^{-1}$ et en $km.h^{-1}$.

1.c. Exprimer en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m et r_0 l'énergie mécanique E_{m0} de la fusée. On trouve $E_{m0} = -9,9.10^{11}\ J$.

2. La Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles Sud-Nord Oz à la vitesse angulaire Ω. On tient compte de la rotation propre de la Terre et on note $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$ le vecteur associé à cette rotation. On définit le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t(O, \overrightarrow{e_x}', \overrightarrow{e_y}', \overrightarrow{e_z})$ en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique.



2.a. Poser le calcul permettant de montrer que la vitesse angulaire de rotation est égale à $\Omega = 7,3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$.

2.b. La fusée de masse m se trouve initialement immobile par rapport à la Terre en un point B sur sa base de lancement à la latitude λ.

Donner, **par rapport au référentiel géocentrique**, la nature de la trajectoire de la fusée (immobile en B dans $\mathcal{R}_t$ et mobile dans $\mathcal{R}_g$) et exprimer le module v_B de sa vitesse. Faire l'application numérique de v_B en $m.s^{-1}$ pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5^0$) et pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^0$).

L'énergie potentielle de la fusée est liée uniquement à la force gravitationnelle, exprimer l'énergie mécanique E_m de la fusée en B dans $\mathcal{R}_g$ en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_T, R_T, Ω et λ. Pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5^0$) on trouve $E_m = -2,485.10^{13}\ J$ et pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^0$) on trouve $E_m = -2,484.10^{13}\ J$

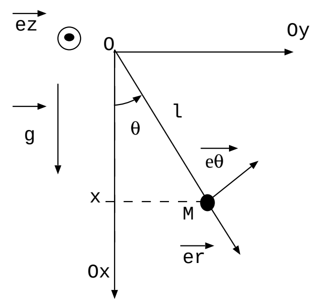
3. Déduire des valeurs numériques des énergies mécaniques, la base de lancement qu'il faut préférer en justifiant votre réponse.

II. **Un enfant sur une balançoire**

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Partie I

Un enfant sur une balançoire est assimilé à un pendule simple M de masse m, suspendu par un fil de longueur l accroché en O. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est supposé galiléen. On repère la position du point M par l'angle θ, on travaille dans la base polaire : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. Donnée: $g = 9,8\ ms.^{-2}$. A l'instant $t = 0$, l'enfant est abandonné sans vitesse initiale en $\theta(t = 0) = \theta_0$.



1. Dans un premier temps on néglige les frottements, montrer que le système est conservatif et exprimer son énergie mécanique en fonction de m, g, l, θ et $\dot{\theta}$. En déduire que, dans l'hypothèse des petits angles, $\theta(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. Exprimer ω_0 en fonction de g et l. On mesure que l'enfant effectue 10 allers-retours sur la balançoire en un temps $\Delta t = 45\ s$. En déduire la valeur numérique de l.

On suppose que M subit la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}$ où h est une constante positive et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel d'étude.

2. Déterminer l'unité de la constante h.

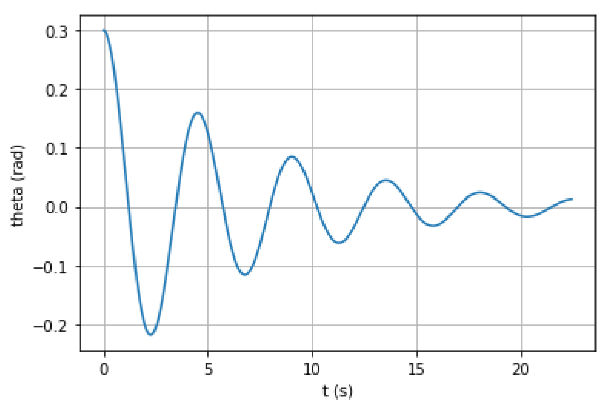
3. Déduire de la RFD appliquée à M dans le référentiel terrestre que $\theta(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Exprimer ω_0 et ξ en fonction de g, l, et h.

4. On donne la courbe $\theta(t)$. Préciser le nom du régime observé et montrer que $\xi < 1$ dans un tel régime. On définit le décrément logarithmique par $\delta = \ln(\dfrac{\theta(t)}{\theta(t+T)})$ où T est la pseudo période. Déduire de la courbe les valeurs numériques de δ et de T.

5. Etablir l'expression théorique de $\theta(t)$ en fonction de ξ, ω_0, t et de deux constantes d'intégration A et B que l'on ne demande pas d'exprimer. En déduire l'expression théorique de δ en fonction de ξ, ω_0 et T.



6. Déduire de cette étude les valeurs numériques de ξ et de h. Préciser l'unité de ξ.

7. En annexe 1, on donne le code dont l'exécution a donné la courbe $\theta(t)$, compléter le code.

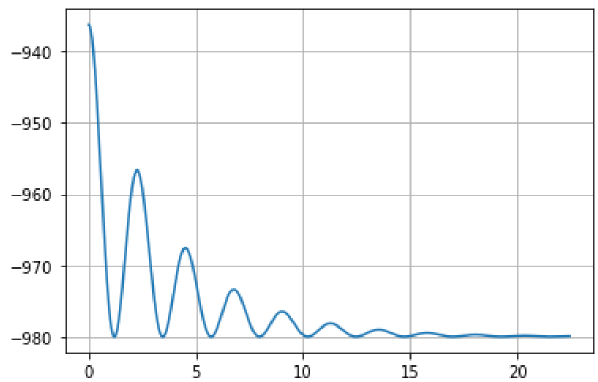
8. On complète le code par ces lignes:

```
15 b=[0]
16 for i in range(len(t)-1):
17 ——b.append((theta[i+1]-theta[i])/(t[i+1]-t[i]))
18 plt.plot(t,-m*g*l*np.cos(theta))
19 plt.grid()
20 plt.show()
21 plt.plot(t,m*l**2*b**2/2)
```

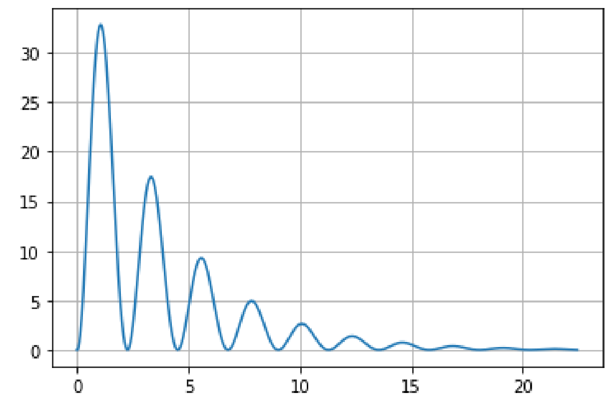
```
22 plt.grid()
23 plt.show()
```

L'exécution du code donne les graphes suivants:

Courbe 1



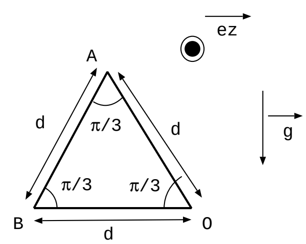
Courbe 2



Expliquer ce que représente b. Préciser l'ordonnée et l'abscisse de la courbe que l'on veut tracer ligne 18. Cette courbe correspond-elle à la courbe 1 ou 2? Justifier. Préciser l'ordonnée et l'abscisse de la courbe que l'on veut tracer ligne 21. Cette courbe correspond-elle à la courbe 1 ou 2? Justifier.

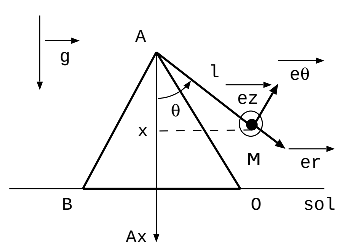
Partie II : stabilité de la balançoire

Le bâti de la balançoire est composé de trois barres identiques OA, OB et AB de même masse m et de longueur d. Ces trois barres forment le triangle équilatéral OAB. Les angles au sommet en A, O et B sont égaux à $\pi/3$. Le bâti repose sur le sol sur la barre OB, le bâti n'est pas fixé sur le sol.



9. Représenter sur votre copie le bâti de la balançoire et les forces poids notées $\overrightarrow{P}_{OA}$, $\overrightarrow{P}_{OB}$ et $\overrightarrow{P}_{AB}$ exercées respectivement sur chacune des barres OA, OB et AB. Exprimer les moments de chacune de ces forces par rapport à O. En déduire que le moment résultant du poids sur le bâti calculé par rapport à O s'écrit: $\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) = \dfrac{3mgd}{2}\overrightarrow{e_z}$.

Une balançoire assimilée à un pendule simple de longueur l et de masse m_0 en M est accroché au bâti en S. On repère la position de M par l'angle θ que fait le pendule par rapport à la verticale. Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Donnée: $g = 9,8\ m.s^{-2}$.



10. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur le pendule M et montrer qu'il constitue un système conservatif. On note θ_m l'amplitude maximale des oscillations du pendule. Déduire des propriétés d'un système conservatif que la norme de la vitesse en M est $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_m)}$.

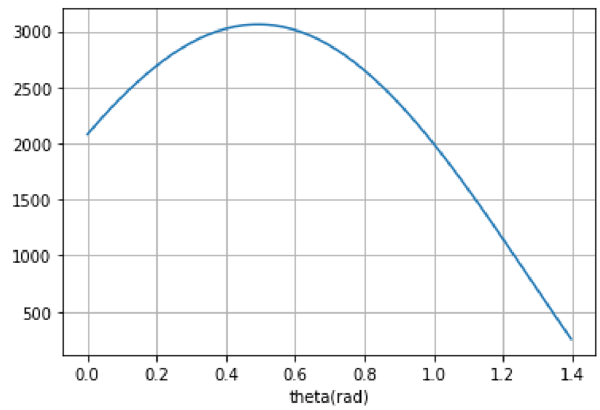
11. Déduire de la RFD appliquée à M dans le référentiel d'étude galiléen, l'expression de la tension de la corde en M en fonction de m_0, g, θ et θ_m.

12. On note $\overrightarrow{F}$ la force exercée par la corde en A. Cette force a la même norme que la tension de la corde en M, montrer que le moment de cette force par rapport à O s'écrit: $-m_0gd(3\cos\theta - 2\cos\theta_m)\cos(\theta - \pi/3)$.

13. On donne le code python suivant:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
d=4.
g=9.8
thetam=80*np.pi/180
m0=40.
theta=np.linspace(0,thetam,500)
f=m0*g*d*(3*np.cos(theta)-2*np.cos(thetam))*np.cos(theta-np.pi/3)
plt.plot(theta,f)
plt.grid()
plt.xlabel('theta(rad)')
plt.show()
```

L'exécution de ce code donne:



Préciser ce que représente cette courbe et déduire de cette courbe et d'un raisonnement physique, la valeur de la masse m de chaque barre composant le bâti pour que le bâti ne bascule pas dans la situation étudiée. Quelle serait la masse de chaque barre pour une balançoire de masse $m_0 = 100\ kg$?

NOM:

Annexe 1:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
m,g,l,h= 20, ......, ...... , .........
omega0=..........
xi=............
omega=................
theta0=............
t=np.linspace(....., ...........,1000)
theta=np.exp(.....................)*(theta0*np.cos(omega*t)+xi*theta0/(1-xi)**0.5*np.sin(omega*t))
plt.plot(t,theta)
plt.grid()
plt.xlabel('...........')
plt.ylabel('.........................')
plt.show()
```