Ball-trap

1) R' est en rotation dans R donc R' n'est pas galiléen (il n'est pas en translation rectiligne uniforme dans R).

Le palet subit dans R' :

les forces d'interaction : son poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$

la réaction du support : $\vec{R} = R_x\,\vec{e_x}' + R_y\,\vec{e_y}' + R_z\,\vec{e_z}$

les forces d'inertie : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}(M) = +m\omega^2\,\overrightarrow{HM} = m\omega^2 x\,\vec{e_x}'$

$\vec{F_{ic}} = -2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{R'} = -2m\,\omega\vec{e_z}\wedge\dot{x}\,\vec{e_x}' = -2m\omega\dot{x}\,\vec{e_y}'$

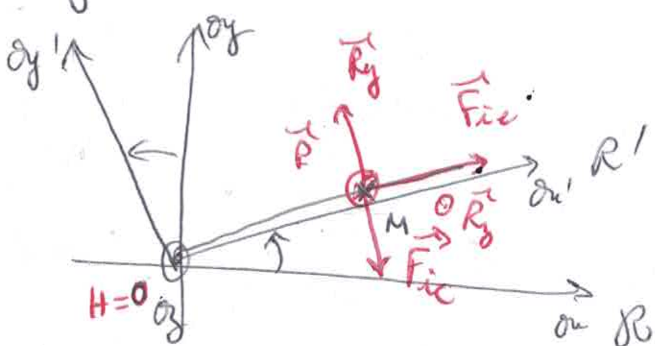
2) On applique la RFD à M dans R' non galiléen :

$m\,\vec{a}(M)_{R'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}}$

avec $\vec{a}(M)_{R'} = \ddot{x}\,\vec{e_x}'$

en projection sur $\vec{e_x}'$: $m\ddot{x} = -m\omega^2 x + R_x$

soit $\boxed{\ddot{x} - \omega^2 x = 0}$



en effet $R_x = 0$ car quand il n'y a pas de frottements la réaction du support est normale au support ou encore la réaction tangente à la vitesse est nulle

3) Equation caractéristique : $r^2 - \omega^2 = 0$ soit $r = \pm\omega$

d'où $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

C.I. $\begin{cases} x(t=0) = \frac{L}{4} = A + B \\ \dot{x}(t=0) = A\omega - B\omega = 0 \end{cases}$ donne $\boxed{A = B = \frac{L}{8}}$

d'où $\boxed{x(t) = \frac{L}{8}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)}$

4) Dans R', le galet décrit une droite (il se déplace sur le bras OA)

soit $\boxed{\vec{v}(M)_{R'} = \dot{x}\,\vec{e_x}' = \frac{L\omega}{8}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)\vec{e_x}'}$

5) R' est en rotation dans R donc $\vec{v_e}(M) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \omega\,\vec{e_z}\wedge x\,\vec{e_x}'$

soit $\boxed{\vec{v_e}(M) = \omega\, x(t)\,\vec{e_y}'}$

le mvt d'entraînement est le mvt du point coïncident qui ici décrit un cercle de centre $H=0$ à la vitesse angulaire ω

d'où $\boxed{\vec{v_e}(M) = \frac{L\omega}{8}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)\vec{e_y}}$

6) a – 3 `L = 0.8` # à t=0 l'énoncé nous dit que $x(t=0) = \frac{L}{4}$, or on lit $x(t=0) = 0{,}2$ m d'où $L = 4 \times 0{,}2\,m = 0{,}8\,m$

5 `t = np.linspace(0, 0.9, 100)` # sur la courbe, on voit que l'abscisse varie de 0 s à 0,9 s

6 `x = L/8 * (np.exp(omega*t) + np.exp(-omega*t))` # on veut tracer x(t) : x=...

9 `plt.xlabel('t (s)')`

10 `plt.ylabel('x (m)')`

6) b – L'instant t_f est défini par $x(t_f) = L = 0{,}8$ m – soit on lit $t_f \simeq 0{,}68$ s –
A cet instant on trace la tangente à la courbe pour avoir une estimation de $\dot{x}(t_f)$. On mesure $\dot{x}(t_f) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}85}{0{,}4} \simeq 2{,}1\ ms^{-1}$

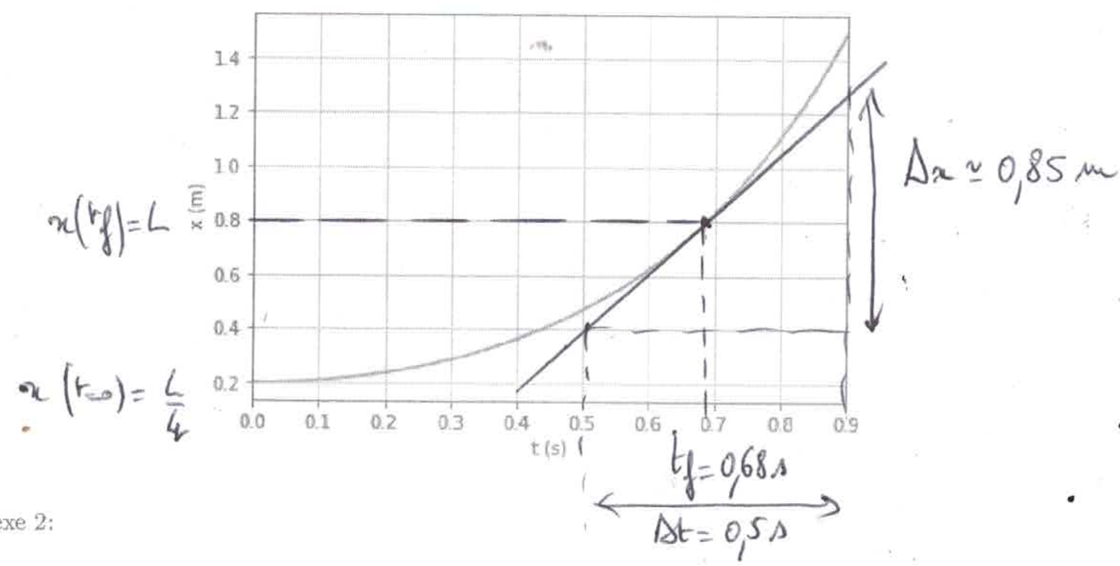
On compare avec $\dot{x}(t_f) = \frac{L\omega}{8}\left(e^{\omega t_f} - e^{-\omega t_f}\right) = \frac{0{,}8 \times 3}{8}\left(e^{3\times 0{,}68} - e^{-3\times 0{,}68}\right) = 2{,}27\,m$

6) c – La vitesse d'entraînement est $v_e(t_f) = \omega L = 3 \times 0{,}8 = 2{,}4\ ms^{-1}$.
L'angle $\theta(t_f)$ balayé par le bras est $\theta(t_f) = \omega t_f = 3 \times 0{,}68 = 2{,}04$ rad ou 117°.

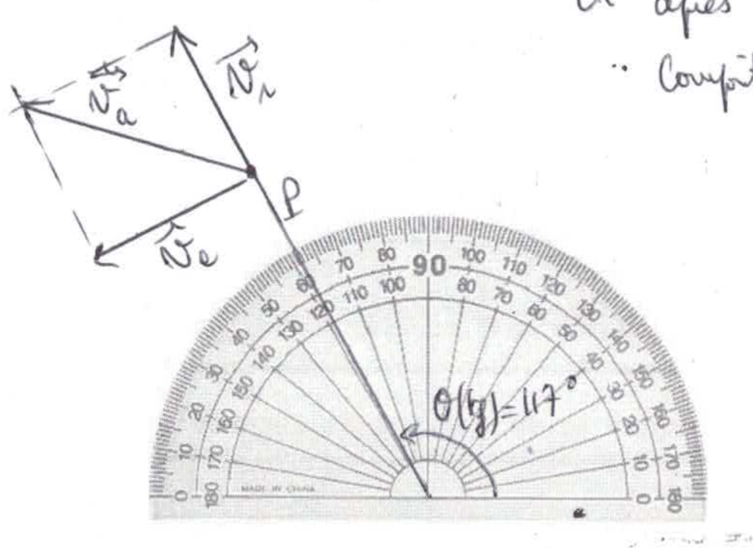
6) d – Voir feuille

NOM:

Annexe 1:



Annexe 2:



d'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

on mesure $\|\vec{v}_a\| \simeq 3,2$ cm

soit $v_a = 3,2 \text{ m s}^{-1}$