Correction DM 1 de physique

1.

1.a. Le projectile ne subit que son poids soit d'après la RFD appliquée au projectile dans le référentiel galiléen: $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$.

En projection sur Ox: $\ddot{x} = 0$

En projection sur Oz: $\ddot{z} = -g$

On primitive deux fois en utilisant les conditions initiales $x(t=0) = 0$, $z(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0 \cos\alpha$ et $\dot{z}(t=0) = v_0 \sin\alpha$.

Soit $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$ et $x = v_0 \cos\alpha t$

Soit $\dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha$ et $z = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t$.

On en déduit l'équation de la trajectoire en éliminant le temps t dans les deux équations soit $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ et donc $z = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x$: c'est l'équation d'une parabole.

1.b. On résout l'équation de la trajectoire pour $z = 0$ soit $0 = x(-\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x + \tan\alpha)$ d'où $x = 0$: c'est le point de départ du projectile et $x = \dfrac{2v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$: c'est la portée du tir.

La portée est maximale pour $\sin(2\alpha) = 1$ soit $\alpha = 45^0$ et $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

1.c. t est la variable en abscisse et d'après la courbe t varie entre 0 s et 7 s d'où la ligne 8: t=linspace(0,7,500).

Sous python, il faut écrire les angles en radian pour calculer leur sinus et leur cosinus.

$c_1(t) = v_0 \cos\alpha t = x(t)$

$c_2(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t = z(t)$.

On lit $z(t) = 0$ pour $t = 6,2\ s$ et $x(t = 6,2\ s) = 107\ m = x_p$: c'est la portée du tir.

Or d'après la théorie, la portée est $x_p = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ d'où $v_0 = \sqrt{\dfrac{gx_p}{\sin(2\alpha)}} = 35\ m.s^{-1}$.

1.d. On trouve α dans les expressions de cos et sin ligne 9 soit $\alpha = \dfrac{i5\pi}{180}$ en radian donc $\alpha = 5i$ (on multiplie par $\dfrac{180}{\pi}$ pour convertir en degrés) avec i qui prend les valeurs $1, 2, ..., 17$. L'angle α prend donc les valeurs 5^0, 10^0, 15^0,...,85^0.

Pour $x = 100\ m$, les paraboles passent en dessous de $z = 23\ m$ donc les projectiles d'une hauteur supérieure à $23\ m$ ne sont pas atteints.

Pour $x = 70\ m$ et $z = 25\ m$, les projectiles qui atteignent ce point sont envoyés avec $\alpha = 40^0$ ou $\alpha = 70^0$.

1.e. On lit sur le code ligne 16, l'équation de la parabole de sûreté $z = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}$.

1.f. La cible soit se trouver sur la trajectoire du projectile donc ses coordonnées vérifient l'équation $z_c = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x_c$. Dans cette équation, on connaît v_0, x_c et z_c, et on cherche la valeur de α donc c'est une équation d'inconnue α. On remplace $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ et on doit donc résoudre l'équation $\dfrac{gx_c^2}{2v_0^2} \tan^2\alpha - x_c \tan\alpha + z_c + \dfrac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0$.

On pose $\tan\alpha = X$ et on résout l'équation du second degré:

$\dfrac{gx_c^2}{2v_0^2} X^2 - x_c X + z_c + \dfrac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0$.

On écrit le discriminent $\Delta = x_c^2 - 4(\dfrac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\dfrac{gx_c^2}{2v_0^2}$

Lorsque $\Delta > 0$: il existe deux valeurs de X donc deux valeurs de α qui sont solution: cela signifie qu'une cible peut être atteinte par un projectile envoyé avec deux valeurs de α différentes (voir réponse $1d$).

Lorsque $\Delta < 0$: il n'existe pas de valeur de X solution, donc il n'existe pas de valeur de α permettant d'atteindre la cible, la cible est en sécurité.

Le cas limite est donc $\Delta = 0$ (une seule valeur de α pour que la cible soit atteinte), et $\Delta = 0$ donne $x_c^2 - 4(\frac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\frac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0$ soit $x_c^2(1 - (\frac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\frac{2g}{v_0^2} = 0$ soit après calcul $z_c = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_c^2}{2v_0^2}$: c'est l'équation de la parabole de sûreté.

2. Par analyse dimensionnelle: $[k] = [\frac{f}{mv^2}] = [\frac{ma}{mv^2}] = [\frac{a}{v^2}] = \frac{m.s^{-2}}{m^2.s^{-2}} = m^{-1}$.

On a $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$

3. On applique la RFD au projectile qui subit son poids et la force de frottements: $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} - mk||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$ soit $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} - k||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\overrightarrow{v}$

En projection sur Ox: $\ddot{x} = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x}$

En projection sur Oz: $\ddot{z} = -g - k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z}$

4.

4.a. On applique le DL: $f(t + tau) = f(t) + tauf'(t)$

Soit $\dot{x}(t + tau) = \dot{x}(t) + tau\ddot{x}(t)$ et $\dot{z}(t + tau) = \dot{z}(t) + tau\ddot{z}(t)$.

4.b. De la même façon $x(t + tau) = x(t) + tau\dot{x}(t)$ et $z(t + tau) = z(t) + tau\dot{z}(t)$.

5.

5.a. Les conditions initiales sont $x(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0 \cos\alpha$ et $\dot{z}(t = 0) = v_0 \sin\alpha$ d'où:

ligne 9 : lx,lz=[0],[0]

ligne 10 : lvx,lvz=[v0*np.cos(alpha),v0*np.sin(alpha)]

5.b. Ligne 14 on lit lt.append(lt[i]+tau) donc on complète la liste des temps par la relation de récurrence $t_{i+1} = t_i + tau$ avec le premier terme $t = 0$. Le temps prend donc les valeurs 0, tau, $2tau$, $3tau$,... $Ntau$.

Sur la courbe le temps final est $t_f = 3\ s = Ntau$ soit $tau = \frac{t_f}{N} = \frac{3}{600} = 0.005$.

5.c. On complète le code avec les réponses questions 4a et 4b avec $a1 = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x} = \ddot{x}$ et $a2 = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z} - g = \ddot{z}$.

ligne 17 : lvx.append(lvx[i]+a1*tau)

ligne 18 : lvz.append(lvz[i]+a2*tau)

ligne 19 : lx.append(lx[i]+lvx[i]*tau)

ligne 20 : ly.append(ly[i]+lvy[i]*tau)

5.d. Sur les courbes on lit $z = 0$ pour $t = 2,8\ s$ et $x(t = 2,8\ s) = 13,5\ m$: c'est la portée du tir.