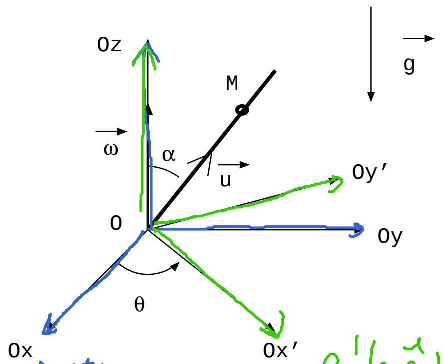
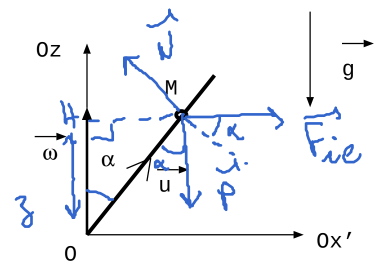
Tige en rotation



$R(O\,\vec{e}_x\,\vec{e}_y\,\vec{e}_z)$ $R'(O\,\vec{e}_x{}'\,\vec{e}_y{}'\,\vec{e}_z)$



$OM = x$

1) a – R' est en rotation dans R donc R' n'est pas galiléen

Bilan des forces dans R' pour M à l'équilibre dans R' :

Poids $\vec{P}$

Réaction $\vec{N}$ (perpendiculaire à la tige)

$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \underbrace{\vec{v}_r(M)}_{=\vec{0}} = \vec{0}$ ← M immobile dans R'

b. PFD appliquée à M dans R' : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$

On projette sur $\vec{u}$: $-mg\cos\alpha + \|\vec{F}_{ie}\|\sin\alpha = 0$ avec $\|\vec{F}_{ie}\| = m\omega^2 \|\vec{HM}\| = m\omega^2 x_e \sin\alpha$, $x_e = OM$

d'où $\cancel{m}g\cos\alpha = \cancel{m}\omega^2 x_e \sin\alpha \sin\alpha$

$$\boxed{x_e = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}}$$

dans R', M se déplace sur la tige, M a un m^{vt} rectiligne

2) a. Bilan des forces dans R' :

$\vec{N}$: ne travaille pas

$\vec{P}$: force conservative $E_{pp} = +mgz = mgx\cos\alpha$ ← Oz vers le haut

$\vec{F}_{ie}$: force conservative $E_{pie} = -m\omega^2\frac{HM^2}{2} = -m\omega^2\frac{x^2\sin^2\alpha}{2}$

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M|_{R'})$ $\perp$ à $\vec{v}(M|_{R'})$: ne travaille pas

donc le système est conservatif et $E_m = m\frac{v(M|_{R'})^2}{2} + E_p = m\frac{\dot{x}^2}{2} + mgx\cos\alpha - m\omega^2\frac{x^2\sin^2\alpha}{2}$

b. $E_m = $ cste car le système est conservatif

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x}\cos\alpha - \frac{m\omega^2}{\cancel{2}}\cancel{2}x\dot{x}\sin^2\alpha = 0$$

donc $\boxed{\ddot{x} - \omega^2\sin^2\alpha\, x = -g\cos\alpha}$

3)

```
 9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import numpy as np
11
12 alpha,g,omega=np.pi/3,9.8,3
13 N=1000
14 dt=........
15 Xe=g*np.cos(alpha)/omega**2/np.sin(alpha)**2
16 X0=.....
17 v0=.....
18 X=[X0]
19 v=[v0]
20 t=[0]
21 for i in range(N):
22     C=-g*np.cos(alpha)+omega**2*np.sin(alpha)**2*X[i]
23     t.append(t[i]+dt)
24     v.append(v[i]+...........)
25     X.append(X[i]+...........)
26
27 plt.plot(t,X)
28 plt.xlabel('t(s)')
29 plt.ylabel('X(m)')
30 plt.grid()
31 plt.show()
```

$$x_e = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} = \frac{9{,}8 \times \cos(\pi/3)}{3^2 \times \sin^2(\pi/3)} = 0{,}72\,m$$

$$C = -g\cos\alpha + \omega^2 \sin^2\alpha \, x = \ddot{x}$$

$$v(t+dt) = v(t) + dt\,\frac{dv}{dt}$$

ligne 24 : v.append(v[i] + dt * C)

$$x(t+dt) = x(t) + dt\,\frac{dx}{dt}$$

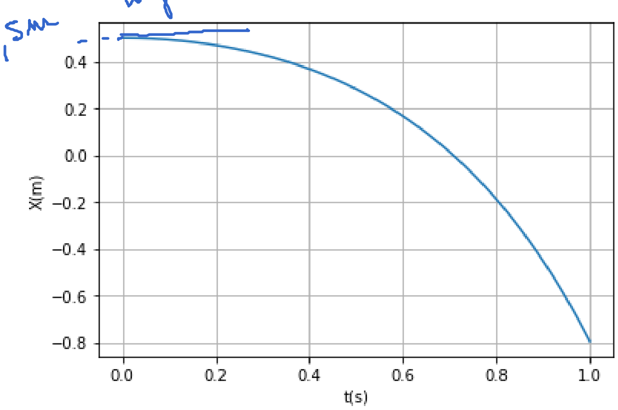
ligne 25 : x.append(x[i] + v[i] * dt)

tangente horizontale à t=0

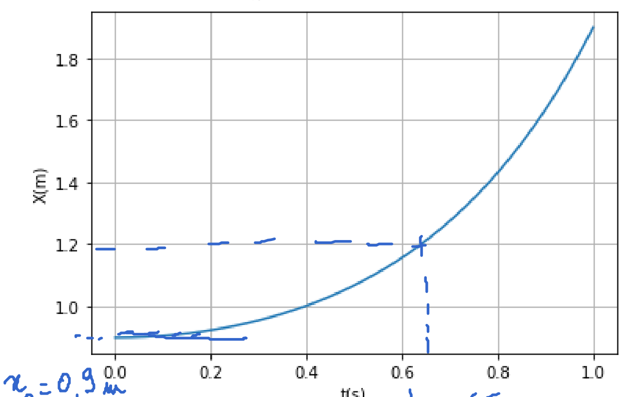
Simulation 1

$x_0 = 0{,}5\,m$

$v_0 = 0\,m\,s^{-1}$



Simulation 2



$x_0 = 0{,}9\,m$

$v_0 = 0\,m\,s^{-1}$

$t = 0{,}65\,s$

$t = [0, dt, 2\,dt, \dots, \underbrace{N\,dt}_{t_f = 1\,s}]$

d'où $dt = \frac{t_f}{N} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}\,s$

Simulation 1 : $x_0 < x_e$ et $x(t) \downarrow$ donc l'anneau glisse vers 0

Simulation 2 : $x_0 > x_e$ et $x(t) \uparrow$ donc l'anneau va quitter la tige à $t = 0{,}65\,s$

Pour tester la stabilité d'un équilibre, on écarte M de sa position d'équilibre :

- s'il revient l'équilibre est stable
- s'il s'éloigne encore plus, l'équilibre est instable

Ici l'équilibre est instable puisque quand on prend $x_0 < x_e$, x continue de $\downarrow$
$x_0 > x_e$, x continue d'$\uparrow$