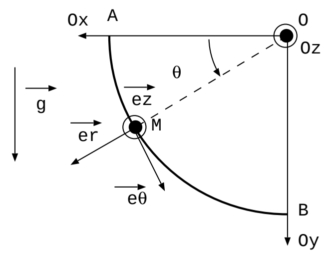
DS1 de physique

Le sujet comprend trois exercices à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

I. **Enfant sur un toboggan**

Un enfant glisse sur un toboggan assimilé à un quart de cercle de rayon R et de centre O. L'enfant part de A et arrive en bas du toboggan en B. L'enfant de masse m et assimilé à un point matériel M est repéré par ses coordonnées polaires. **Le référentiel d'étude est supposé galiléen.**



1. Dans cette question on néglige tout frottement exercé sur l'enfant.

1.a. Représenter les forces exercées sur l'enfant et exprimer l'énergie mécanique de l'enfant en fonction de m, g, R, θ et v. Que dire de cette énergie mécanique au cours du temps? Justifier votre réponse.

1.b. L'enfant part en haut du toboggan en A avec une vitesse initiale de norme v_0. Déduire de la question précédente, l'expression de sa vitesse en fonction de θ, g, R et v_0 lorsqu'il est à la position M repéré par θ.

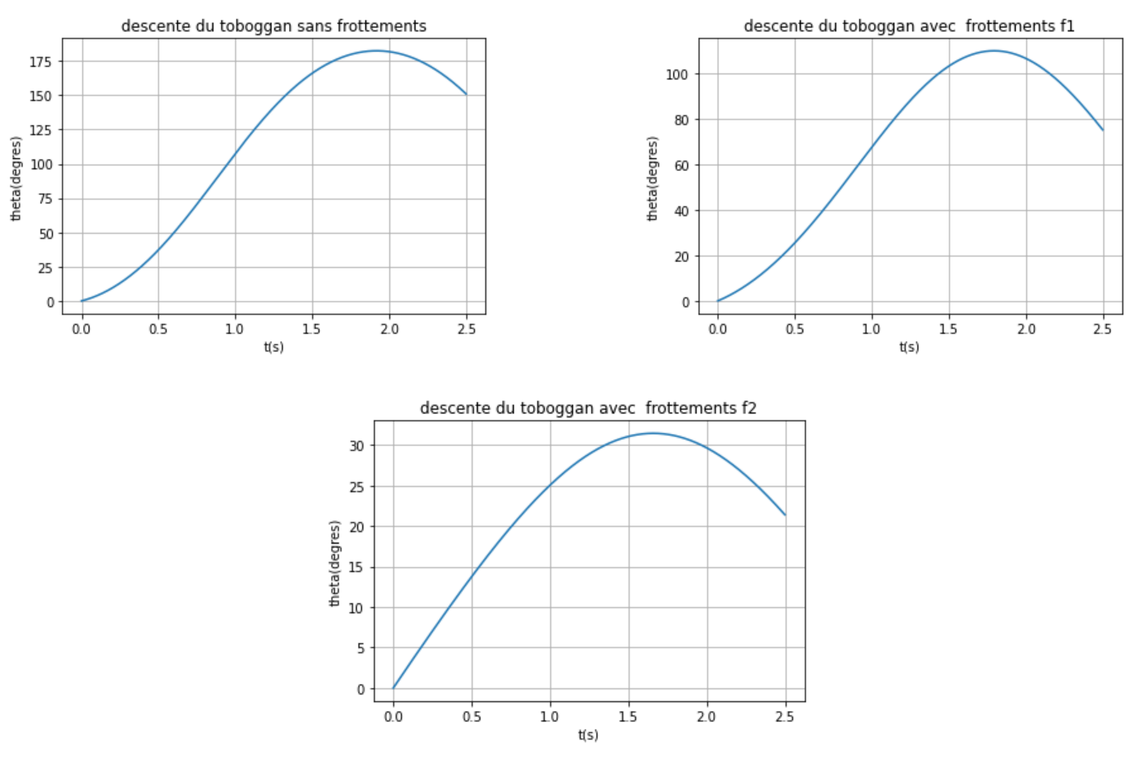
1.c. Exprimer la réaction du toboggan sur l'enfant en fonction de v_0, R, g, m et θ. En quel point la réaction est-elle maximale?

2. Dans cette question, l'enfant subit une force de frottements constante de la forme $\overrightarrow{f} = -f\overrightarrow{e_\theta}$ avec f une constante positive.

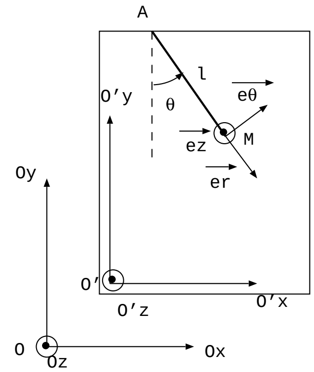
2.a. Exprimer les moments des différentes forces exercées sur M par rapport à O.

2.b. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M l'expression de $\ddot{\theta}$ en fonction de f, m, g, R et θ.

2.c. La résolution de l'équation différentielle sous python conduit aux courbes $\theta(t)$ pour des frottements nuls puis pour des frottements d'intensité f_1 et f_2. Pour chacune des situations, préciser si l'enfant arrive en bas du toboggan et si oui à quel instant. Dans le cas où il n'arrive pas en bas du toboggan, décrire son mouvement.



II. **Pendule dans un ascenseur**



L'ascenseur d'une tour est en train de monter avec une accélération $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_y}$ (avec $a > 0$ ou < 0) dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Un pendule simple constitué d'un fil de longueur l est accroché en A au plafond de l'ascenseur, il porte à son extrémité un point matériel M de masse m repéré par ses coordonnées polaires. On néglige tout frottement.

On définit par $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel lié à l'ascenseur.

1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}'$ est-il galiléen? En déduire le bilan des forces exercées sur M dans $\mathcal{R}'$ et représenter ces forces sur un schéma pour $a > 0$.

2. Exprimer les moments de ces forces par rapport à A par la méthode du bras de levier.

3. Préciser le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ et exprimer son vecteur vitesse et son vecteur accélération dans $\mathcal{R}'$ en fonction des données illustrées sur le schéma.

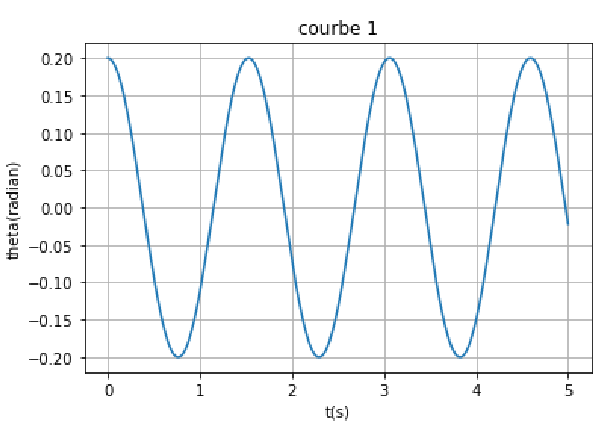
4. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M dans $\mathcal{R}'$ par rapport à A, que $\theta(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. Exprimer ω_0 en fonction des données.

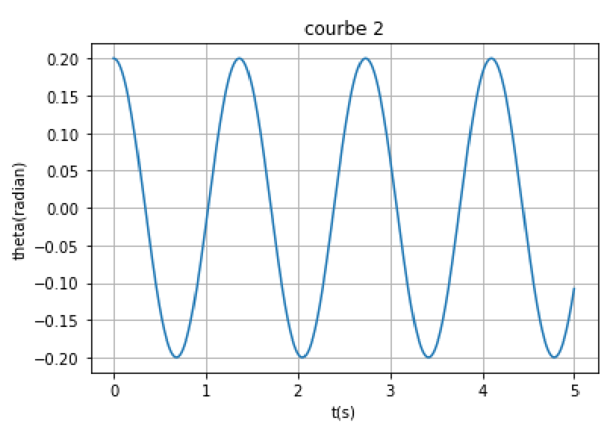
5. Simplifier cette équation différentielle aux petits angles et exprimer $\theta(t)$ pour $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dfrac{v_0}{l}$.

6. On note respectivement T_1, T_2 et T_3, les périodes des oscillations lorsque l'ascenseur a un mouvement uniforme, lorsqu'il accélère ($a > 0$) et lorsqu'il décélère ($a < 0$). Ecrire l'inégalité entre T_1, T_2 et T_3.

7. On donne le code python et son exécution pour des oscillations du pendule aux petits angles.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g,l,m=9.8,0.7,0.2
theta0,v0=....,.....

def f(a,t):
    omega0=....................
    return ........*np.cos(omega0*t)+..........*np.sin(omega0*t)

t=np.linspace(....,....,1000)
plt.plot(t,f(....,t))
plt.title('courbe 1')
plt.ylabel('theta(radian)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.grid()
plt.show()

plt.plot(t,f(....,t))
plt.title('courbe 2')
plt.ylabel('theta(radian)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.grid()
plt.show()
```





7.a. Recopier et compléter à l'aide des questions précédentes les lignes 8 et 9.

7.b. Recopier et compléter en lisant les courbes, les lignes 5 et 11.

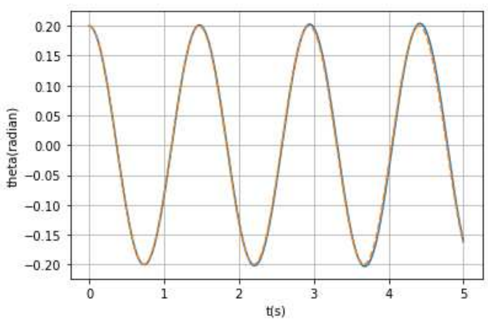
7.c. Mesurer la période des oscillations sur les deux courbes puis recopier et compléter les lignes 12 et 19.

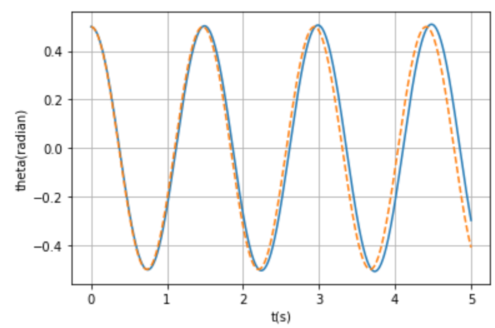
8. On résout numériquement par la méthode d'Euler, l'équation différentielle de la question 4 sans faire d'approximation. Pour cela con complète le code précédent et on donne le résultat de son exécution.

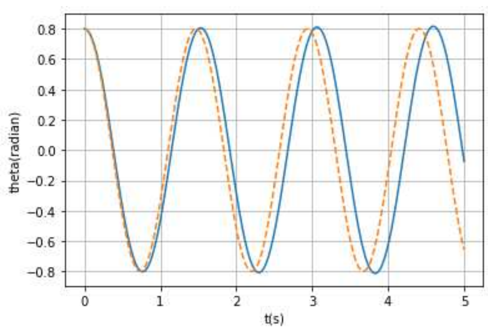
Lignes 27, 28 et 29, on crée des vecteurs contenant $N+1$ termes nuls pour le temps (vecteur nommé vt), pour θ (vecteur nommé vtheta) et pour $\dot{\theta}$ (vecteur nommé vthetap).

```
26 N,dt=....,0.0005
27 vt=np.zeros(N+1)
28 vtheta=np.zeros(N+1)
29 vthetap=np.zeros(N+1)
30
31 vtheta[0]=theta0
32 vthetap[0]=v0/l
33 a=3
34
35 for i in range(N):
36     vt[i+1]=vt[i]+dt
37     C=-((g+a)/l)*np.sin(vtheta[i])
38     vthetap[i+1]=..............
39     vtheta[i+1]=...............
```

```
41 plt.plot(vt,vtheta)
42 plt.plot(vt,f(a,vt),'--')
43 plt.ylabel('theta(radian)')
44 plt.xlabel('t(s)')
45 plt.grid()
46 plt.show()
```







8.a. Exprimer, en fonction de N et dt, le contenu du vecteur vt après exécution de la boucle for. En déduire la valeur numérique de N ligne 26.

8.b. Exprimer $\dot{\theta}(t+dt)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ et dt pour dt petit. Exprimer de même $\theta(t+dt)$ en fonction de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et dt. Que représente C? Recopier et compléter les lignes 38 et 39.

8.c. On cherche à commenter les courbes obtenues pour trois valeurs différentes de $\theta(t=0)=\theta_0$.

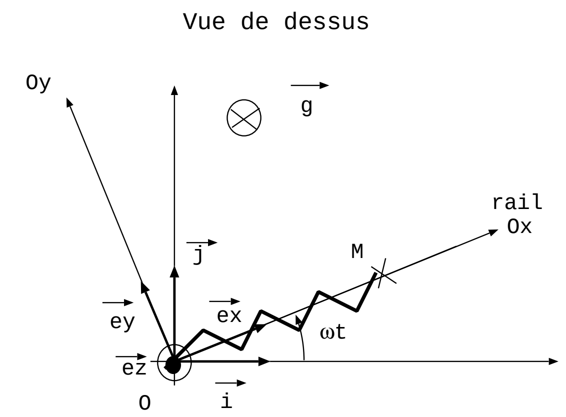
Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ de la courbe en trait plein (ligne 41)? Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ de la courbe en trait plein (ligne 42)?

Expliquer pourquoi les courbes sont confondues pour $\theta_0 = 0,2\ rad$ et pourquoi elles ne sont plus pour les autres valeurs de θ_0.

On dit qu'il y a isochronisme des oscillations lorsque la période des oscillations ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. Vérifier grâce aux courbes données qu'il y a isochronisme des oscillations pour un oscillateur harmonique. Vérifier grâce aux courbes données qu'il n'y a pas isochronisme des oscillations pour le pendule simple.

III. **Ressort en rotation**

On considère un mobile quasi ponctuel M, de masse m qui peut se déplacer sans frottement le long d'un rail (Ox) toujours horizontal en rotation uniforme autour de l'axe Oz vertical. Le vecteur vitesse angulaire de rotation du rail par rapport au sol est $\overrightarrow{\Omega} = \Omega \overrightarrow{e_z}$. Le point M est relié à O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On note $x(t)$ la position de M sur le rail soit $OM = x(t)$.



On note $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel galiléen lié au sol et $\mathcal{R}'(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel tournant lié au rail.

1. Exprimer la vitesse et l'accélération de M dans le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ en fonction des données.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et en déduire les expressions, en fonction de m, Ω, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, des forces d'inertie exercées sur M dans $\mathcal{R}'$.

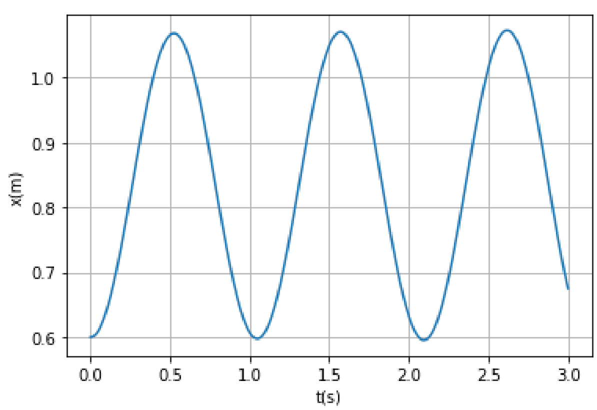
3. La réaction du rail sur M s'écrit $\overrightarrow{R} = R_x\overrightarrow{e_x} + R_y\overrightarrow{e_y} + R_z\overrightarrow{e_z}$. On néglige tout frottement, en déduire que l'une des composantes de la réaction est nulle. Préciser laquelle en justifiant votre réponse.

4. Déduire de la RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}'$ que $x(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{x} + (\omega_0^2 - \Omega^2)x = \omega_0^2 l_0$. Exprimer ω_0 en fonction des données.

5. On donne la courbe $x(t)$ solution de l'équation différentielle pour $k = 10\ N.m^{-1}$ et $m = 100\ g$.

5.a. Déduire de la courbe si l'on a $\Omega > \omega_0$ ou $\Omega < \omega_0$.

5.b. Lire sur la courbe les conditions initiales $x(t=0) = x0$ et $\dot{x}(t=0) = v0$, la période des oscillations et la valeur numérique de la position d'équilibre. En déduire la valeur numérique de la vitesse angulaire Ω et de la longueur à vide l_0 du ressort.



5.c. Pour $\Omega = 13\ rad.s^{-1}$, on obtient la courbe $x(t)$ suivante. Commenter le résultat.