IV. **Pendule dans un ascenseur: correction**

1. $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniformément accéléré dans $\mathcal{R}$ car les axes de $\mathcal{R}'$ sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$ et A a un mouvement rectiligne uniformément accéléré dans $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}'$ n'est pas en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$ donc $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen.

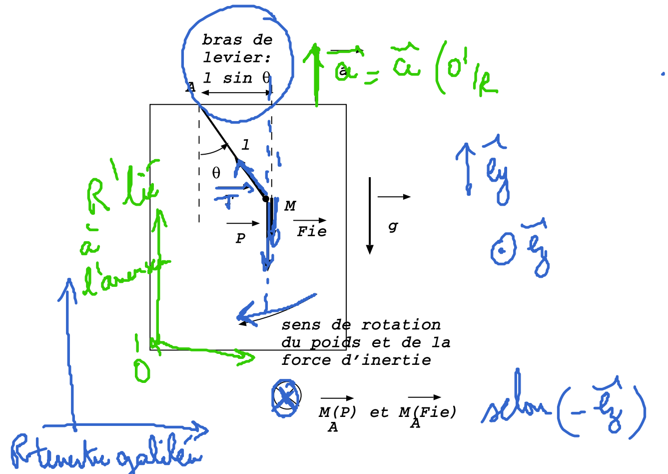
Bilan : $\mathcal{R}'$ en translation ds $\mathcal{R}$

M subit dans $\mathcal{R}'$:

les forces d'interaction poids et tension du fil

les forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a}(O')_{\mathcal{R}} = -ma\overrightarrow{e_z}$ y

la force d'inertie de Coriolis est nulle



2. Le poids et la force d'inertie d'entrainement font tourner M dans le sens horaire soit d'après la règle de la main droite selon $-\overrightarrow{e_z}$ d'où:

$\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin\theta\overrightarrow{e_z}$ $\qquad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) =$ bras de levier $\times$ norme de $\vec{F}$ $(\pm \vec{e_z})$

$\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{F_{ie}}) = -mal\sin\theta\overrightarrow{e_z}$

La tension du fil a un moment nul car elle est incapable de faire tourner M autour de A.

3. M dans $\mathcal{R}'$ décrit un arc de cercle soit $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{v_r}(M) = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{a_r}(M) = l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$.

4. Le TMC appliqué à M dans $\mathcal{R}'$ s'écrit $\dfrac{d\overrightarrow{L_A}(M)}{dt} = \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{F_{ie}})$

avec $\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AM}\Lambda m\overrightarrow{v_r}(M) = l\overrightarrow{e_r}\Lambda ml\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

On a donc $ml^2\ddot{\theta} = -m(a+g)l\sin\theta$ soit par identification $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{a+g}{l}}$.

$\sin\theta = \theta$

5. Aux petits angles l'équation devient $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 soit la solution $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec pour conditions initiales:

$\theta(t=0) = \theta_0 = A$

$\dot{\theta}(t=0) = B\omega_0 = \dfrac{v_0}{l}$

d'où $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{l\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

pulsation du pendule dans R galiléen

6. $a = 0$ lorsque l'ascenseur a un mouvement uniforme soit $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. $\qquad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{a+g}{l}}$

$a > 0$ lorsque l'ascenseur accélère soit $\omega_2 = \sqrt{\frac{g+a}{l}} > \omega_1$.

$a < 0$ lorsque l'ascenseur décélère soit $\omega_3 = \sqrt{\frac{g+a}{l}} < \omega_1$.

Or on a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, donc plus la pulsation est grande et plus la période est petite d'où $\omega_3 < \omega_1 < \omega_2$ conduit à $T_2 < T_1 < T_3$.

7.

7.a. f correspond à la variable θ soit $\qquad f(a,t) \rightarrow \theta(t)$ pour une valeur de a fixée

ligne 8: omega0=((a+g)/l)**0.5

ligne 9: return theta0*np.cos(omega0*t)+v0/l/omega0*np.sin(omega0*t)

C.I.

7.b. La tangente à la courbe à $t = 0$ est horizontale donc ligne 5 : theta0, v0 = 0.2, 0

7.c. ligne 11 : t = np.linspace(0, 5, 1000)

Courbe 1: $3T = 4,6\ s$ soit $T = 1,53\ s$ et $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 4,1\ rad.s^{-1}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{a+g}{l}}$ soit $a = l\omega_0^2 - g = 2,0\ m.s^{-2}$

ligne 12 : plt.plot (t, f(2,t)) $\leftarrow a$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{a+g}{l}} = \dfrac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow a = \dots$

ligne 19 : plt. plot(t, f(5, t))

Courbe 2: $3T = 4,1\ s$ soit $T = 1,37\ s$ et $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 4,6\ rad.s^{-1}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{a+g}{l}}$ soit $a = l\omega_0^2 - g = 5,0\ m.s^{-2}$

8. On souhaite résoudre cette équation par la méthode d'Euler.

8.a. Dans la boucle for i varie de 0 à $N-1$.

Vt[i+1] = vt[i] + dt

Pour $i = 0$: vt[1]=vt[0]+dt=dt car vt[0]=0

Pour $i = 1$: vt[2]=vt[1]+dt=dt+dt=2dt

Ainsi de suite, vt s'écrit donc array([0,dt,2dt,..., Ndt]). tf

Sur la courbe le temps final est $\boxed{t_f = 5\ s}$ d'où $N = \dfrac{t_f}{dt} = \dfrac{5}{0,0005} = 10000$.

8.b. C représente $\ddot{\theta}$ à l'instant $t_i = idt$.

On fait des DL à l'ordre 1 en dt petit:

$\dot{\theta}(t+dt) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)dt$

$\theta(t+dt) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)dt$

ligne 38: vthetap[i+1]=vthetap[i]+C *dt

ligne 39: vtheta[i+1]=vtheta[i]+vthetap[i] *dt

$\dot{\theta}(t+dt) \rightarrow$ vthetap[i+1] | $\theta(t+dt) \rightarrow$ vtheta[i+1]

$\dot{\theta}(t) \rightarrow$ vthetap[i] | $\theta(t) \rightarrow$ vtheta[i]

$\ddot{\theta} \rightarrow C$

8.c. ligne 41, on trace vtheta en fonction de vt soit $\theta(t)$ avec θ obtenu en résolvant l'équation différentielle exacte $\boxed{\ddot{\theta} + omega_0^2 \sin\theta = 0.}$ ce n'est pas l'ép. diff. d'un O.H.

ligne 21, on trace f(a,vt) soit la fonction $\theta(t)$ pour $a = 3\ m.s^{-2}$, cette fonction est la solution de l'équation différentielle approchée $\boxed{\ddot{\theta} + omega_0^2\theta = 0.}$ Cette approximation est valable a priori aux petits angles.

c'est l'ép. d'un O.H.

$\sin\theta = \theta$

Ainsi pour $\theta_0 = 0,2\ rad$, les courbes sont superposées, ce qui signifie que les solutions des équations différentielles $\ddot{\theta} + omega_0^2 \sin\theta = 0$ et $\ddot{\theta} + omega_0^2\theta = 0$ sont identiques, effectivement l'approximation $\sin\theta = \theta$ est valable pour $\theta < 0,2\ rad$ (angles petits).

En revanche, pour $\theta_0 = 0,5\ rad$ et $\theta_0 = 0,8\ rad$, les courbes ne sont pas confondues, ce qui signifie que les solutions des équations différentielles $\ddot{\theta} + omega_0^2 \sin\theta = 0$ et $\ddot{\theta} + omega_0^2\theta = 0$ sont différentes, effectivement l'approximation $\sin\theta = \theta$ n'est pas valable aux grands angles comme $0,5\ rad$ et $0,8\ rad$.

$\cancel{\sin\theta = \theta}$

solution $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta$ de O.H.

La courbe en pointillés a pour période $T = \dfrac{4,4}{3} = 1,47\ s$. La période est toujours la même quelque soit les conditions initiales donc quelque soit l'amplitude des oscillations. La courbe en pointillés est celle d'un oscillateur harmonique donc il y a bien isochronisme des oscillations pour un OH.

T_0 : période est la m, qqsoit θ_0

En revanche, la courbe en trait plein, qui correspond au pendule simple, n'a pas la même période lorsque l'amplitude des oscillations varie. Il n'y a donc pas isochronisme des oscillations.

T période est ≠ pour θ_0 ≠