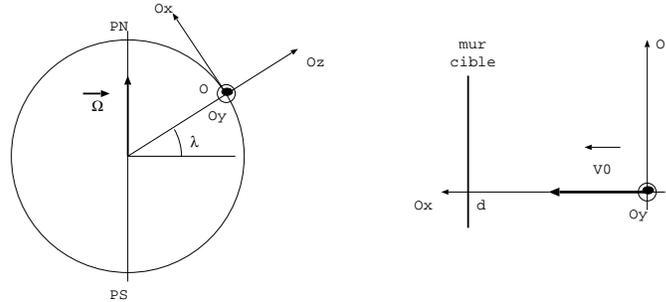


# DM 2 de physique

## I. Tir d'une balle de fusil

Une balle de fusil est tirée horizontalement vers le nord avec le vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  depuis un point  $O$  de la terre de latitude  $\lambda = 40^\circ$  sur un mur cible à distance  $d$  de  $O$ . Pour la base de projection, on choisit l'axe  $Ox$  tangent à un méridien vers le nord,  $Oy$  tangent à un parallèle vers l'ouest et  $Oz$  la verticale ascendante du lieu. On néglige tout frottement.



1. Le référentiel terrestre étant supposé galiléen, déduire de la RFD appliquée à  $M$  les équations paramétriques du mouvement du projectile  $(x(t), y(t), z(t))$ . En déduire l'équation de la trajectoire du projectile et exprimer en fonction de  $d, v_0$  et  $g$ , les coordonnées du point d'impact  $I(x_I, y_I, z_I)$  sur le mur cible situé à une distance  $d$  de  $O$ . AN:  $v_0 = 50 \text{ m.s}^{-1}$  et  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

2. On étudie maintenant l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du projectile. Le référentiel n'est plus considéré galiléen.

2.a. Exprimer le vecteur  $\vec{\Omega}$ , le vecteur vitesse angulaire de rotation propre de la terre. Donner la valeur numérique de  $\Omega$ .

2.b. Exprimer la force de Coriolis en prenant pour la vitesse relative de  $M$ , la vitesse obtenue dans le cas où le référentiel d'étude est galiléen (question 1). Cela revient à dire que la force de Coriolis modifie très peu le mouvement de la balle.

2.c. Appliquer la RFD au projectile dans le référentiel terrestre non galiléen et en déduire les équations paramétriques du mouvement  $(x(t), y(t), z(t))$ . Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient-elle pas explicitement dans la RFD?

Exprimer, en fonction de  $d, v_0, \omega, \lambda$  et  $g$ , les coordonnées du point d'impact  $I(x_I, y_I, z_I)$  sur le mur cible situé à une distance  $d$  de  $O$ . AN :  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  et  $d = 100 \text{ m}$ .

3. On résout la RFD par la méthode d'Euler, pour comparer les résultats de la méthode approchée utilisée précédemment et la résolution numérique. On donne le code et le résultat de son exécution.

```

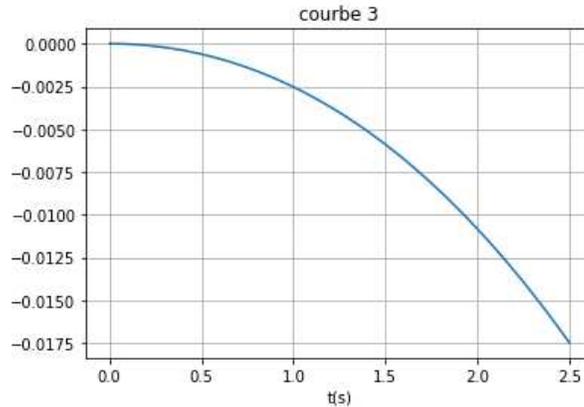
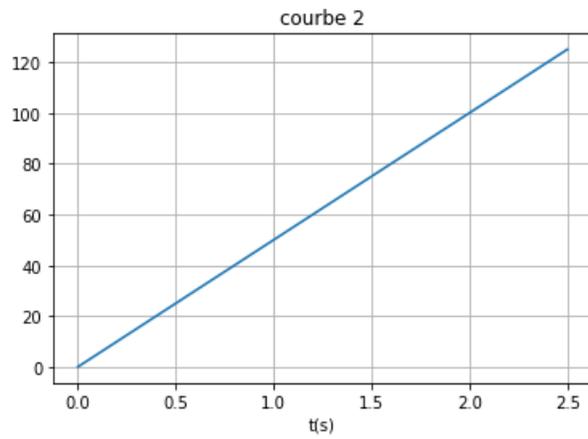
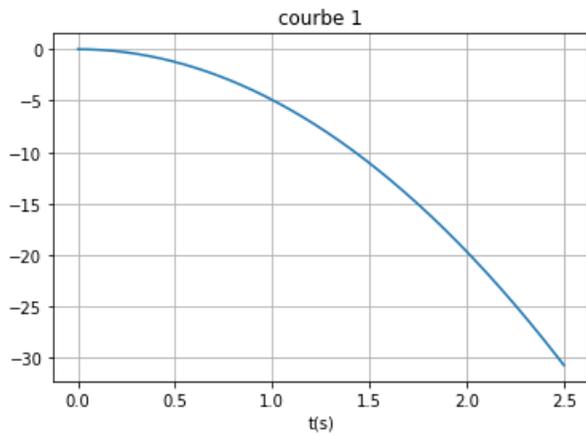
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g,omega=9.8,.....
5 lat=40*np.pi/180.
6 tau,N=0.005,500
7 v0=50
8 Vecg=np.array([.....])
9 Vecomega=np.array([.....])
10 VecV=np.array([.....])
11 VecPos=np.array([.....])
12
13 lt,l1,l2,l3=[0],[0],[0],[0]
14 for i in range(N):
15     lt.append(lt[i]+tau)
16     C=Vecg-2*np.cross(Vecomega,VecV)
17     VecV=VecV+tau*C
18     VecPos=VecPos+tau*VecV
19     l1.append(VecPos[0])
20     l2.append(VecPos[1])
21     l3.append(VecPos[2])

```

```

23 plt.plot(lt,l3)
24 plt.xlabel('t(s)')
25 plt.title('courbe 1')
26 plt.grid()
27 plt.show()
28
29 plt.plot(lt,l1)
30 plt.xlabel('t(s)')
31 plt.title('courbe 2')
32 plt.grid()
33 plt.show()
34
35 plt.plot(lt,l2)
36 plt.grid()
37 plt.xlabel('t(s)')
38 plt.title('courbe 3')
39 plt.show()

```



**3.a.** Compléter la ligne 4.

**3.b.** Lignes 8, 9, 10 et 11, Vecg, Vecomega, VecV et VecPos représentent les vecteurs  $\vec{g}$ ,  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{v}(t=0)$  et  $\vec{OM}(t=0)$ . Recopier les lignes 8, 9, 10 et 11 et les compléter.

**3.c.** Exprimer  $\vec{v}(t + \text{tau})$  de façon approchée en fonction de  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{a}(t)$  et  $\text{tau}$  pour  $\text{tau}$  petit.

Exprimer  $\vec{OM}(t + \text{tau})$  de façon approchée en fonction de  $\vec{OM}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$  et  $\text{tau}$  pour  $\text{tau}$  petit.

Quelles lignes utilisent ce deux relations? Que représente  $C$ ? (`np.cross(u, v)` réalise  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ).

**3.d.** Que représentent 11, 12, 13 aux lignes 19, 20 et 21. En déduire ce que représentent les courbes 1, 2 et 3 et déduire des courbes les coordonnées du point d'impact du projectile sur le mur cible placé à une distance  $d$  de  $O$ . Comparer aux résultats précédents. L'approximation faite question 2b est-elle justifiée?

4. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la balle ne subit que son poids. La RFD appliquée à  $M$  dans le référentiel terrestre s'écrit:  $m \vec{a}(M) = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$ .

On projette puis on intègre deux fois par rapport au temps pour avoir les équations horaires du mouvement:

sur  $Ox$ :  $\ddot{x} = 0$  soit  $\dot{x} = v_0$  et  $x = v_0 t$

sur  $Oy$ :  $\ddot{y} = 0$  soit  $\dot{y} = 0$  et  $y = 0$

sur  $Oz$ :  $\ddot{z} = -g$  soit  $\dot{z} = -gt$  et  $z = -\frac{gt^2}{2}$

On en déduit l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre temps dans les équations horaires soit

$t = \frac{x}{v_0}$  et  $z = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$  dans le plan  $y = 0$ .

Le projectile touche la cible pour  $x_I = d$  soit  $z_I = -\frac{gd^2}{2v_0^2} = -19,6 \text{ m}$ .

5. **5.a.** On a  $\vec{\Omega} = \Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z$  avec  $\Omega = \frac{2\pi}{24.3600} = 7,3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ .

**5.b.** La force de Coriolis s'écrit  $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_t} = -2m(\Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z) \wedge (v_0 \vec{e}_x - gt \vec{e}_z) = -2m\Omega(\cos \lambda gt + v_0 \sin \lambda) \vec{e}_y$ .

**5.c.** On applique la RFD au projectile dans le référentiel terrestre non galiléen:  $m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}_t} = \vec{P} + \vec{F}_{ic} = -mg \vec{e}_z - 2m\Omega(\cos \lambda gt + v_0 \sin \lambda) \vec{e}_y$ .

La force d'inertie d'entraînement est contenue dans le poids puisque le poids par définition est la force de gravitation de la Terre ajoutée de la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre. Et la force d'inertie est négligeable devant l'attraction de la Terre.

On projette et on intègre deux fois par rapport au temps pour avoir les équations horaires:

sur  $Ox$ :  $\ddot{x} = 0$  soit  $\dot{x} = v_0$  et  $x = v_0 t$

sur  $Oy$ :  $\ddot{y} = -2\Omega(\cos \lambda gt + v_0 \sin \lambda)$  soit  $\dot{y} = -2\Omega(\cos \lambda g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \lambda t)$  et  $y = -2\Omega(\cos \lambda g \frac{t^3}{6} + v_0 \sin \lambda \frac{t^2}{2})$

sur  $Oz$ :  $\ddot{z} = -g$  soit  $\dot{z} = -gt$  et  $z = -\frac{gt^2}{2}$

Le projectile touche la cible pour  $x_I(t_I) = d = v_0 t_I$  soit  $t_I = \frac{d}{v_0}$

d'où  $z_I = -\frac{gd^2}{2v_0^2} = -19,6 \text{ m}$  et  $y_I = -2\Omega(\cos \lambda g \frac{d^3}{6v_0^3} + \sin \lambda \frac{d^2}{2v_0}) = 1,17 \text{ cm}$ .

6.

**6.a.** ligne 4 `g,omega=9.8,2*np.pi/24/180` ou `7.3E-5`

**6.b.** Ligne 8: `Vecg=np.array([0,0,-g])` car  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

Ligne 9: `Vecomega=np.array([omega*np.cos(lat),0,omega*np.sin(lat)])` car  $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_z)$

Ligne 10: `VecV=np.array([v0,0,0])` car  $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_x$

Ligne 11: `VecPos=np.array([0,0,0])` car  $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$

**6.c.** On fait des DL à l'ordre 1 en  $\tau$ :

$\vec{v}(t + \tau) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\tau$ : relation utilisée ligne 17 avec  $C$  qui représente le vecteur accélération  
 $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

$\vec{OM}(t + \tau) = \vec{OM}(t) + \vec{v}(t)\tau$ : relation utilisée ligne 18

**6.d.** `VecPos[0]` représente  $x$  donc l1 correspond à  $x$ , la courbe 2 est  $x(t)$ .

`VecPos[1]` représente  $y$  donc l2 correspond à  $y$ , la courbe 3 est  $y(t)$ .

`VecPos[2]` représente  $z$  donc l3 correspond à  $z$ , la courbe 1 est  $z(t)$ .

Sur la courbe 2, on lit  $t = 2 \text{ s}$  pour atteindre la cible en  $x = d = 100 \text{ m}$ .

Sur les courbes 1 et 3, on lit  $y(t = 2 \text{ s}) = -0,011 \text{ m} = -1,10 \text{ cm}$  et  $z(t = 2 \text{ s}) = 19,5 \text{ m}$ .

On trouve sur  $y$  une déviation de  $1,10 \text{ cm}$  alors que précédemment on trouvait  $1,17 \text{ cm}$  soit un écart relatif de  $\frac{1,17 - 1,10}{1,10} = 6,3 \%$ . L'approximation faite question 2b est justifiée.