PROBLÈME

Un modèle simplifié de sismographe

Le sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements de l'écorce terrestre par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Il peut être modélisé par un ressort de constante de raideur k dont l'extrémité supérieure est solidaire d'un boîtier posé sur le sol. **(Voir Figure 1)**

Une masse m de centre d'inertie G, attachée à l'autre extrémité du ressort est reliée à un amortisseur (non représenté) exerçant une force de frottement visqueux que l'on écrira $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Une partie non représentée permet d'enregistrer les mouvements de la masse.

Lorsque l'appareil détecte un tremblement de terre, le boîtier est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au référentiel du laboratoire.

schéma lorsque le boîtier est immobile

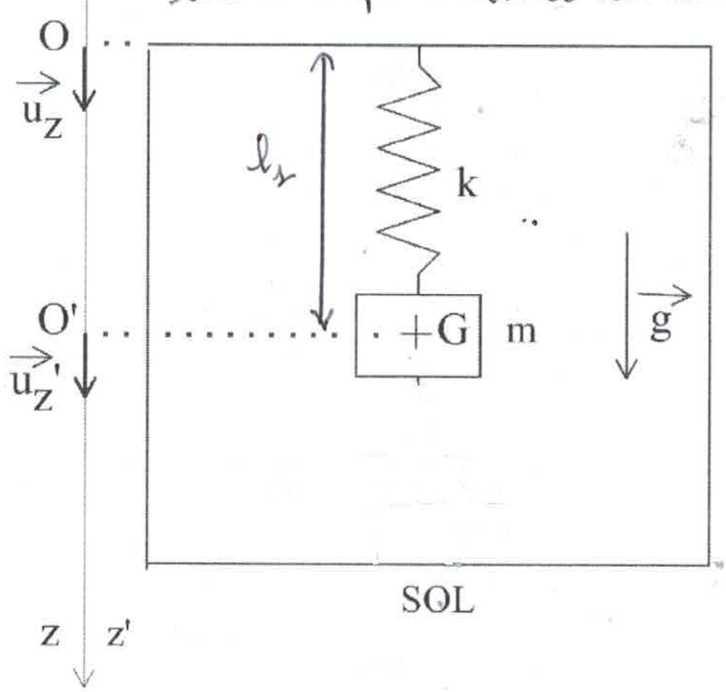

Figure 1 - Modèle du sismographe

L'axe **(Oz)** est un axe fixe lié au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

L'axe **(O'z')** est un axe mobile lié au référentiel boîtier $\mathcal{R}'$.

La cote de l'origine **O'** du repère $\mathcal{R}'$ représentée sur le schéma correspond à la position d'équilibre du centre d'inertie de la masse lorsque le boîtier est immobile, c'est-à-dire en absence de mouvement de l'écorce terrestre.

Q1. Que représente le coefficient λ dans l'expression de $\vec{f}$? Quelle est son unité ?

Q2. La longueur à vide du ressort est notée ℓ_0. On considère dans cette question que le sol ne vibre pas.
Appliquer la seconde loi de Newton à la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au boîtier qui est alors galiléen.
Quelle est la longueur à l'équilibre ℓ_1 du ressort en fonction des données ?

Q3. Lorsque le sol vibre, le référentiel lié au boîtier n'est plus galiléen.
Rappeler les expressions des forces d'inertie à prendre alors en compte et donner leurs expressions dans le cas du sismographe étudié.

Q4. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur la masse dans $\mathcal{R}'$ et les représenter en supposant que les valeurs de l'allongement du ressort, de la vitesse du point G et de l'accélération d'entraînement sont positives.

Q5. Appliquer la seconde loi de Newton à la masse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au boîtier.
On notera z'_G la cote du point G dans le repère $\mathcal{R}'$.
Projeter cette relation sur l'axe vertical.
On supposera que l'expression de $z_S(t)$ décrivant le mouvement du sol est :

$$z_S(t) = E_m cos(\omega t)$$

Q6. On écrit cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 z'_G}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz'_G}{dt} + \omega_0^2 z'_G = E_m \omega^2 cos(\omega t)$$

Comment appelle-t-on ω_0 et Q ? Donner leurs expressions littérales.

Q7. Pour un sismographe, le facteur de qualité est toujours très élevé.
Quelle est alors l'équation obtenue en simplifiant la relation précédente si on se place dans le cas idéal où le facteur de qualité est infini ?

Q8. En régime permanent, la solution de cette équation s'écrit $z'_G(t) = Z_m cos(\omega t + \phi')$ avec $Z_m > 0$.
Quelle est l'expression de Z_m ?

Pour répondre à cette question on utilise la notation complexe.
On écrit $\underline{z}'_G = \underline{Z_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z_m} = Z_m e^{j\phi'}$
Ecrire l'équation différentielle en complexe, en déduire l'expression de $\underline{Z_m}$ puis celle de Z_m.

Q9. On donne la représentation graphique de $Z_m(u)$ avec $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.**Figure 2)**
Justifier l'allure de cette courbe à partir des résultats de la question précédente.

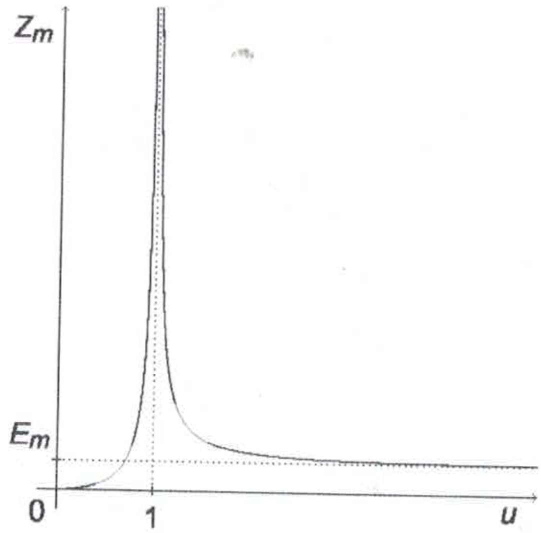

Figure 2 - Représentation graphique de $Z_m(u)$

Q10. Il faut distinguer trois zones sur cette courbe : zone I ($u \ll 1$), zone II (*u tend vers 1*) et zone III ($u \gg 1$)
Comment appelle-t-on le phénomène mis en évidence pour $u = 1$?
À quelle partie de la courbe correspond la zone de fonctionnement du sismographe ?
Citer un exemple de la vie courante correspondant à la zone restante de cette courbe.