Les équations différentielles en physique

I. **Equation différentielle du premier ordre**

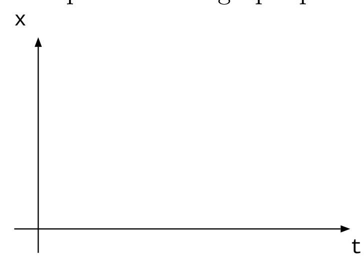
Soit $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme: $\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_e}{\tau}$. On donne la condition initiale: $x(t=0) = x_0$.

Solution particulière:

Solution de l'équation homogène:

Solution:

Représentation graphique:



II. **Equation du second ordre particulière: l'oscillateur harmonique**

Soit $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$. On donne les conditions initiales: $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$.

Solution particulière:

Solution de l'équation homogène:

Solution:

Représentation graphique:

III. **L'équation différentielle qui ressemble à celle de l'oscillateur harmonique**

Soit $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme: $\ddot{x} - \omega_0^2 x = C$. On donne les conditions initiales: $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$.

Solution particulière:

Solution de l'équation homogène:

Solution:

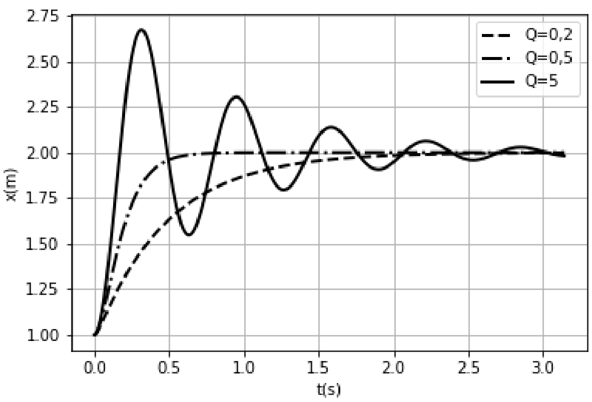
IV. **Equation différentielle de l'oscillateur amorti**

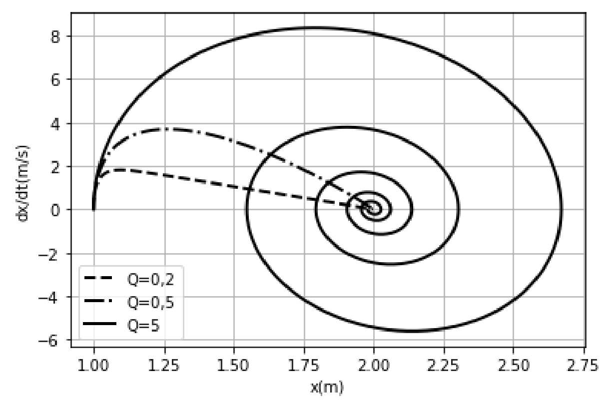
Soit $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$. On donne les conditions initiales: $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$.

ω_0 est

Q est

Courbes représentatives:

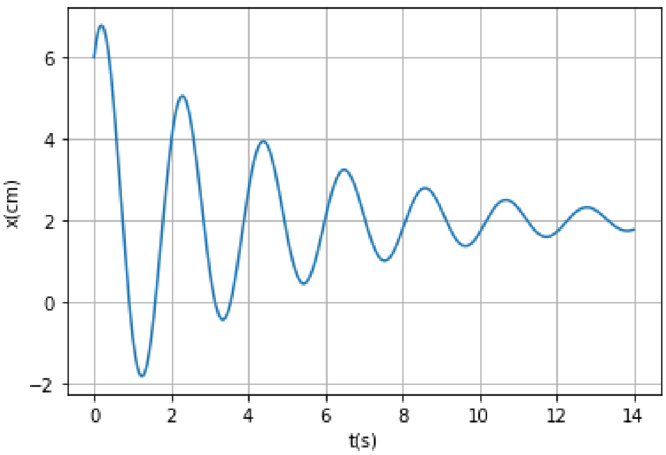




Solution particulière:

Solution de l'équation homogène:

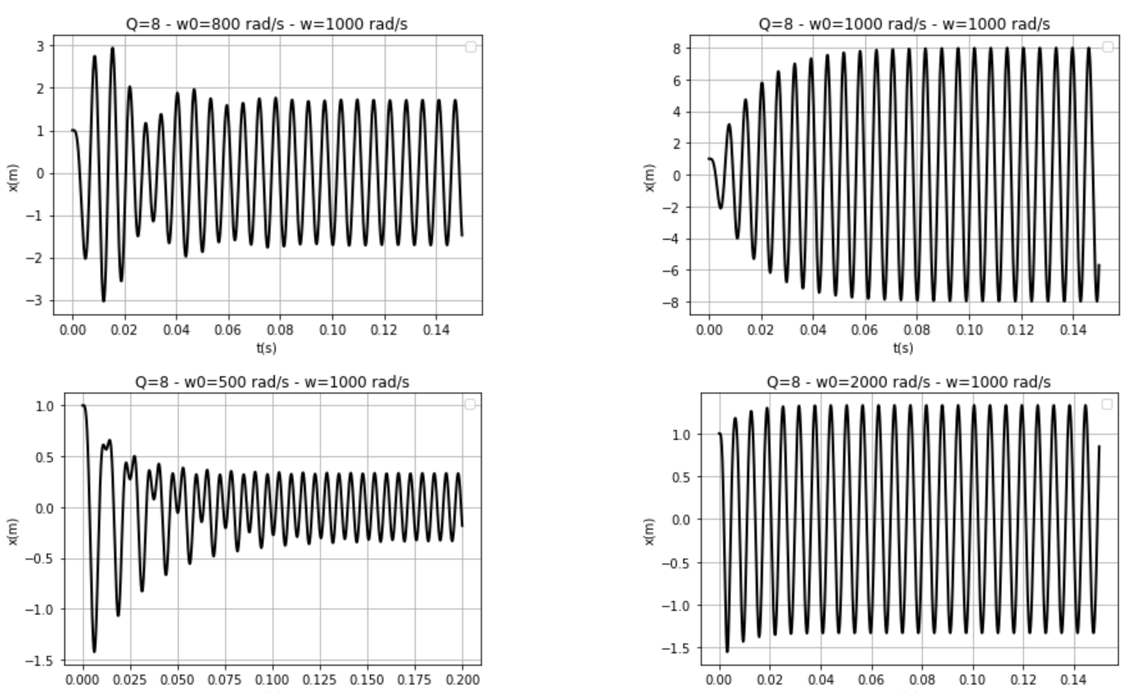
Cas particulier du régime pseudo-périodique: utilisation du décrément logarithmique: on pose $\delta = \ln\left(\dfrac{x(t)-x_e}{x(t+T)-x_e}\right)$ où T est la pseudo-période.



V. **Le régime sinusoïdal forcé**

Soit $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme: $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$.

On donne les courbes représentatives de $x(t)$ obtenues pour différentes valeurs de ω_0 pour $Q = 8$, $\omega = 1000\ rad.s^{-1}$ et les mêmes conditions initiales.



La solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$ présente donc:

une solution générale qui caractérise le régime

une solution particulière qui caractérise le régime

En régime sinusoïdal forcé, on ne cherche que la solution particulière de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, on trouve X_m et ϕ à l'aide de la notation complexe.

En notation complexe, on transforme cos en e^j.

On pose donc $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m =$.

L'intérêt de cette notation est que:

$\dfrac{d\underline{x}}{dt} =$

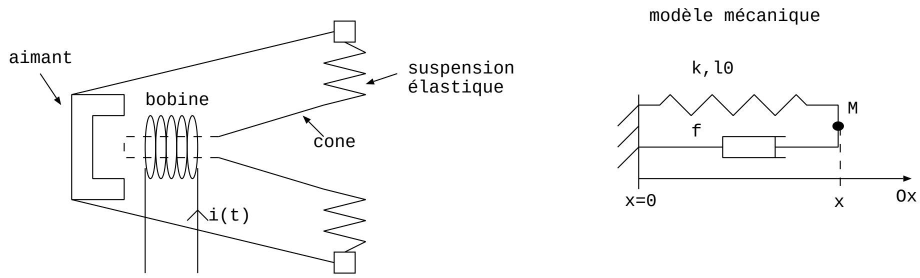
$\displaystyle\int \underline{x} dt =$

Ainsi, en notation complexe, l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$ devient:

Exercice d'application:

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement solide le long de l'axe Ox. Cette masse m, assimilée à un point matériel M, est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f. Elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur. On a $\overrightarrow{F} = \beta i(t)\overrightarrow{e_x}$ avec β une constante et $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

Données : $m = 10\ g$, $k = 15.10^3\ N.m^{-1}$, $\beta = 200\ N.A^{-1}$, $f = 9\ kg.s^{-1}$ et $I_m = 1\ A$.



1. Déduire de la RFD appliquée à M que l'équation différentielle vérifiée par la variable $X = x - l_0$ se met sous la forme $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\cos(\omega t)$. Exprimer et calculer numériquement ω_0, A et Q.

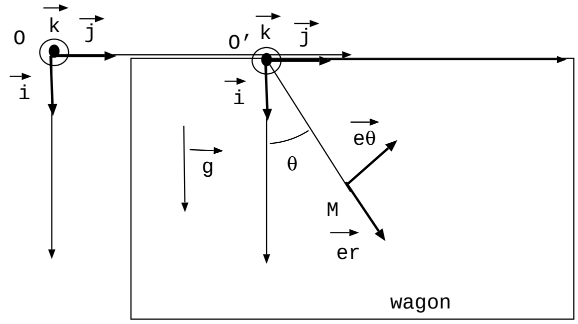
On étudie le régime permanent du haut parleur, lorsque la membrane vibre à la pulsation ω imposée par le courant, on a donc $X(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$. On pose $\underline{X} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\phi}$.

2. Exprimer $\underline{X}_m$ et X_m. Rappeler comment on déduit ϕ de $\underline{X}_m$.

3. Pour une pulsation ω_1, on observe le phénomène de résonance. Exprimer ω_1 en fonction de ω_0 et Q et faire l'application numérique.

4. Calculer X_m et ϕ pour $\omega = \omega_0$.

VI. **Pendule dans un train**



Un pendule simple constitué d'une masse m et d'un fil de masse négligeable et de longueur l = O'M est fixé au plafond d'un train animé d'un mouvement rectiligne sinusoidal dans le référentiel terrestre tel que $\overrightarrow{OO'} = y_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{j}$. Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié à la terre et supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié au train. On note θ l'angle entre le fil et la verticale descendante. Avec les notations de l'énoncé le champ de gravitation s'écrit $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{i}$

1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M.

2. Préciser la nature du mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ et exprimer son vecteur vitesse dans $\mathcal{R}'$.

3. Le pendule subit une force de frottements de la forme $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)$. Déduire du TMC dans $\mathcal{R}'$, l'équation différentielle vérifiée par θ.

4. En régime sinusoidal forcé, θ est de la forme $\theta_m \cos(\omega t + \phi)$. On travaille en notation complexe et on pose $\underline{\theta}(t) = \underline{\theta_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{\theta_m} = \theta_m e^{j\phi}$. Déduire de l'équation différentielle, l'expression de $\underline{\theta_m}$ et en déduire θ_m.

5. Tracer l'allure de θ_m en fonction de ω après avoir cherché les expressions approchées de θ_m à BF et à HF.