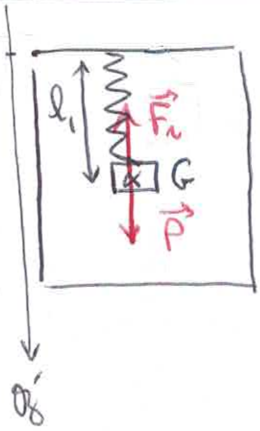
Q1. λ est le coefficient de frottement, d'autant plus grand que les frottements sont importants.

$$[\lambda] = \left[\frac{f}{v}\right] = \left[\frac{ma}{v}\right] = \frac{kg\, ms^{-2}}{ms^{-1}} = kg.s^{-1}$$

RFD : $m\vec a = \vec F_{ext}$

Q2.



Dans le référentiel R' galiléen lié au boîtier, M
G subit : son poids $\vec P = mg\,\vec e_z$

la force de rappel $\vec F_r = -k(\underbrace{l_1 - l_0}_{>0})\,\vec e_z$

la force est selon (−O'z)

A l'équilibre la force de frottements est nulle car $\vec v = \vec 0$

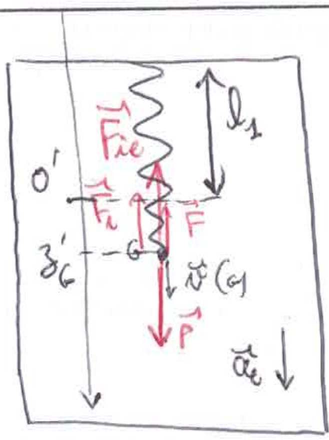
d'où $\vec 0 = [+mg - k(l_1 - l_0)]\,\vec e_z$

soit $\boxed{l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}} > l_0$: ressort étiré

Q3. Lorsque le sol vibre, le boîtier a une accélération non nulle, les axes de R' sont parallèles à ceux de R mais O' a un mvt rectiligne non uniforme dans R donc R' est en translation rectiligne non uniforme dans R soit R' non galiléen. Dans ce cas les forces d'inertie s'écrivent :

$$\boxed{\vec F_{ie} = -m\,\vec a(O'/R)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec F_{ic} = \vec 0}$$

Q4.



Dans R' non galiléen, G subit :

* son poids $\vec P$
* la force de rappel $\vec F_r$: selon (−O'z) car le ressort est supposé étiré
* la force de frottements $\vec F$: selon (−O'z) car on suppose $\vec v(G)$ selon +O'z et la force de frottements est opposée à la vitesse
* la force d'inertie d'entraînement $\vec F_{ie} = -m\vec a_e$ est opposée à l'accélération d'entraînement.

Q5. RFD appliquée à M dans R' :

$$m\,\vec a(G)_{R'} = \vec P + \vec F_r + \vec F + \vec F_{ie}$$

$$m\ddot z'_G = +mg - k(l - l_0) - \lambda \dot z'_G - m\,a(O')_R$$

avec $l = l_1 + z'_G$ avec $a(O')_R = \ddot z_S = -\omega^2 E_m \cos(\omega t)$.

$$m\ddot{z}'_G = mg - k(\ell_1 + z'_G - \ell_0) - \lambda \dot{z}'_G + m\omega^2 E_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

$$= \cancel{mg} - \cancel{k\ell_0} - \cancel{k\frac{mg}{k}} - kz'_G + \cancel{k\ell_0} - \lambda \dot{z}'_G + m\omega^2 E_m \cos(\omega t + \phi)$$

d'où l'éq. diff : $\boxed{\ddot{z}'_G + \frac{\lambda}{m}\dot{z}'_G + \frac{k}{m} z'_G = \omega^2 E_m \cos(\omega t.)}$

Par identification avec l'énoncé : $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ pulsation propre de l'oscillateur

soit $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}}$ facteur de qualité d'autant plus grand que les frottements sont faibles

---

Q7_ Dire que le facteur de qualité est infini, revient à négliger les frottements et l'équation différentielle devient : $\boxed{\ddot{z}'_G + \omega_0^2 z'_G = \omega^2 E_m \cos(\omega t.)}$.

Q8_ En notation complexe : $\underline{z}'_G = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ $\dot{\underline{z}}'_G = j\omega \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ $\ddot{\underline{z}}'_G = -\omega^2 \underline{Z}_m e^{j\omega t}$

et $\cos(\omega t)$ devient $e^{j\omega t}$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$-\omega^2 \underline{Z}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{Z}_m e^{j\omega t} = \omega^2 E_m e^{j\omega t}$$

d'où $\underline{Z}_m = \frac{\omega^2 E_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ et $\boxed{Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{\omega^2 E_m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}}$

Q9_ On remplace ω par $u\omega_0$ (car $u = \frac{\omega}{\omega_0}$)

soit $\boxed{Z_m = \frac{u^2 \omega_0^2 E_m}{|\omega_0^2 - u^2\omega_0^2|} = \frac{u^2}{|1-u^2|} E_m}$

Pour $u \simeq 0$: $Z_m \simeq \frac{u^2}{1} E_m \simeq 0$ (on néglige u^2 devant 1 au dénominateur)

Pour $u \simeq 1$: le dénominateur $1-u^2$ tend vers 0 donc Z_m diverge

Pour $u \to \infty$: $Z_m \simeq \frac{u^2}{u^2} E_m \simeq E_m$ (on néglige 1 devant u^2 au dénominateur)

Q10_ Pour $u = 1$, on observe le phénomène de résonance. ~~Ici à la résonance~~ Z_m diverge dans la réalité Z_m est grand mais ne diverge pas car il y a des frottements.

On veut que les mouvements de la masse traduisent les mouvements du sol, il faut donc pour cela que le système soit réglé pour u très grand soit ω_0 (pulsation propre de la masse) soit très petite devant ω (pulsation du séisme) alors le mvt de G est le même que celui du sol