Chapitre outils : les opérateurs

Dans tout ce cours, on définit $V(M)$: un champ scalaire et $\overrightarrow{A}(M)$: un champ vectoriel.

Exemples de champ scalaire:

Exemples de champ vectoriel:

I. Les quatre opérateurs fondamentaux

1. Le gradient : on note $\overrightarrow{\text{grad}}V$ et on lit gradient V.

Cet opérateur s'applique à un .... et le résultat est un ....

En coordonnées cartésiennes, **et en coordonnées cartésiennes uniquement**, on définit l'opérateur nabla noté $\overrightarrow{\nabla}$ par:

$$\overrightarrow{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Soit $\overrightarrow{\text{grad}}V = \overrightarrow{\nabla}V =$

Exemple : $V(x, y, z) = 5x^2y + x \ln z$

Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}V.d\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes:

Gradient et lignes iso-V (par exemple lignes isobares sur une carte météo ou lignes isoaltitudes sur une car IGN)

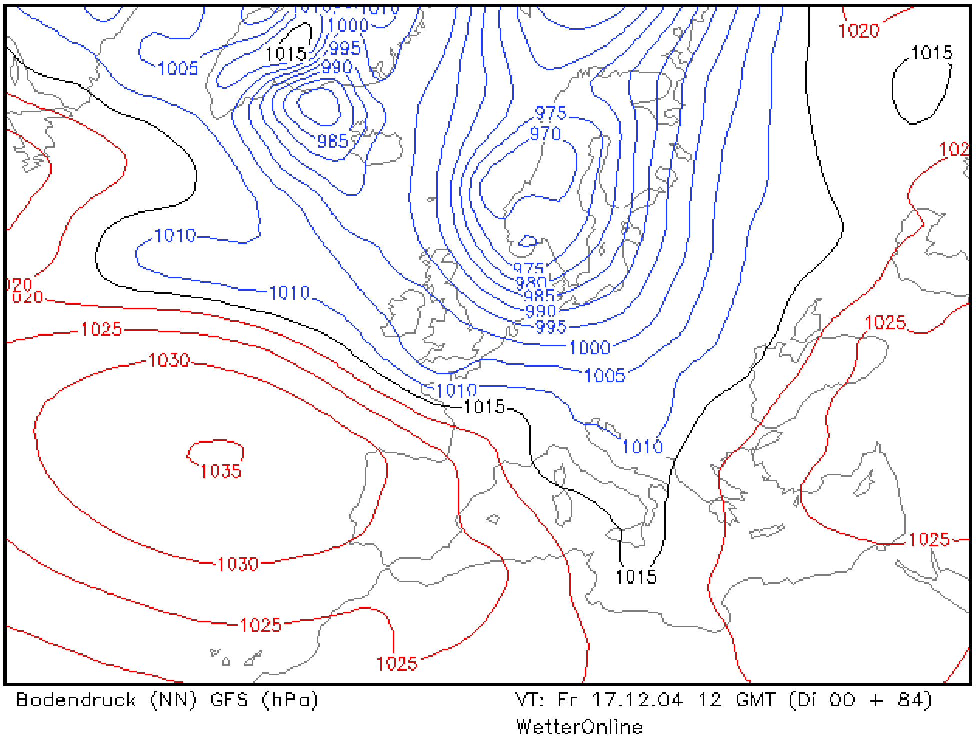
En un point d'une ligne iso-V, le vecteur gradient V (noté $\overrightarrow{\text{grad}}V$) est:

-

-

-

Gradient et lignes isobares :

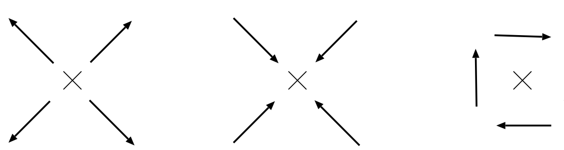


Donnée: la distance à vol d'oiseau entre Brest et Marseille est 1000 km

2. La divergence : on note div$\overrightarrow{A}$ et on lit divergence $\overrightarrow{A}$.

Cet opérateur s'applique à un .... et le résultat est un ....

Signification physique:



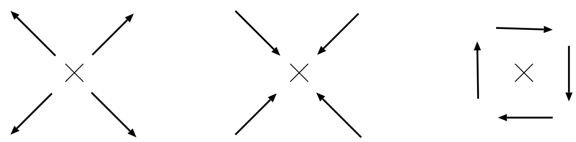
Expression en coordonnées cartésiennes: div$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} =$

Exemple : $\overrightarrow{A} = 3x^2y\overrightarrow{e_x} + 5zx^2\overrightarrow{e_y} + 4x\ln z\overrightarrow{e_z}$

3. Le rotationnel : on note $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}$ et on lit rotationnel $\overrightarrow{A}$.

Cet opérateur s'applique à un .... et le résultat est un ....

Signification physique : le rotationnel traduit la rotation du champ de vecteurs autour d'un point:



Expression en coordonnées cartésiennes: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\Lambda\overrightarrow{A} =$

4. Le Laplacien : on note ΔV (appliqué à un champ scalaire) et $\Delta\overrightarrow{A}$ (appliqué à un champ de vecteurs).

Appliqué à un champ scalaire : il est défini par $\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V)$ soit en coordonnées cartésiennes : $\Delta V = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}V = \overrightarrow{\nabla}^2V =$

Exemple : calculer le Laplacien de $V(x, y, z) = V_0x^2y^3 + V_1\ln z$.

Appliqué à un champ de vecteurs : il est défini par $\Delta\overrightarrow{A} = \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial z^2}$

II. Composition d'opérateurs

$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}) = 0$: la divergence d'un rotationnel est toujours nul.

$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = \Delta V$: la divergence d'un gradient d'un champ scalaire est égal au laplacien scalaire de ce champ.

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = \overrightarrow{0}$: le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

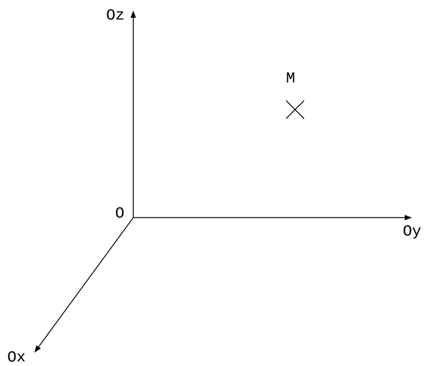
$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A}$: le rotationnel du rotationnel est égal au gradient de la divergence retranché du laplacien.

III. **Autres systèmes de coordonnées**

En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions des opérateurs ne sont pas à connaître, elles sont à savoir utiliser.

Attention: il n'existe pas de vecteur $\vec{\vec{\nabla}}$ ni en coordonnées cylindriques, ni en coordonnées sphériques.

1. Coordonnées cylindriques



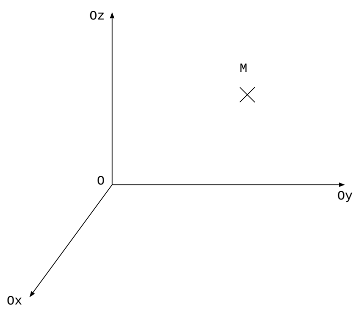
vecteur position: $\overrightarrow{OM} =$

Quand r varie, M se déplace de

Quand z varie, M se déplace de

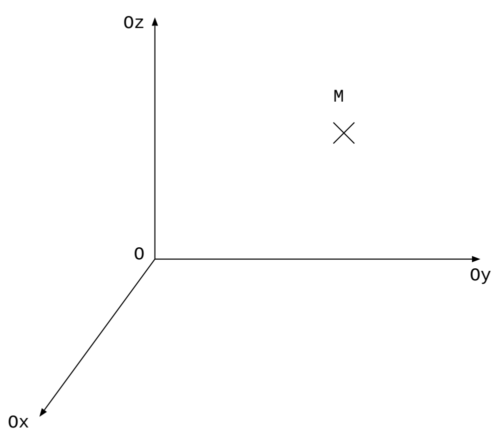
Quand θ varie, M se déplace de

vecteur déplacement élémentaire :
$d\overrightarrow{OM} =$



Volume élémentaire:

2. Coordonnées sphériques



vecteur position: $\overrightarrow{OM} =$

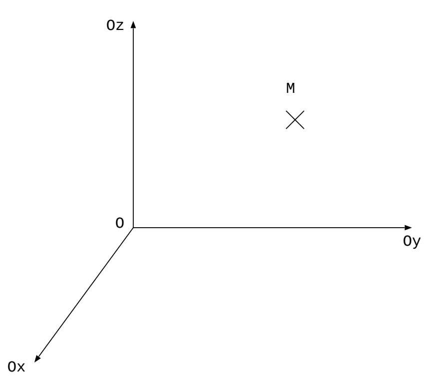
Quand r varie, M se déplace de

Quand θ varie, M se déplace de

Quand ϕ varie, M se déplace de

vecteur déplacement élémentaire :

$d\overrightarrow{OM} =$



Volume élémentaire:

Opérateurs en coordonnées cylindriques:

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

divergence : $div \overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

laplacien scalaire : $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Calculer $div \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{v}$ pour $\overrightarrow{v} = \frac{A}{r^2}\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{v} = \frac{v_0}{r}\sin\theta \overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{v} = v_0 \ln r \overrightarrow{e_z}$.

Opérateurs en coordonnées sphériques:

gradient: $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$

divergence: $div\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$

rotationnel :$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\overrightarrow{e_\phi}$

laplacien scalaire: $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$