

Correction TD diffusion particules

I. Coefficient de diffusion d'une encre

L'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ soit en analyse dimensionnelle $\frac{n}{t} = D\frac{n}{d^2}$ d'où $d^2 = Dt$. On trace donc la distance d^2 en fonction du temps t . Cela donne une droite passant par l'origine et de pente D .

On trouve par une régression linéaire $D = 1,6.10^{-3} \text{ m}^2.s^{-1}$

II. Coefficient de diffusion de CO_2 dans l'air

1. $[j_D] = \text{particules.m}^{-2}.s^{-1}$ et $[n] = \text{particules.m}^{-3}$.

2. La loi de Fick s'écrit $\vec{j}_D = -D\overrightarrow{\text{grad}}n(x) = -D\frac{dn}{dx}\vec{e}_x$: elle signifie que les particules diffusent des fortes vers les faibles densités de particules soit ici selon $+Ox$.

On a $\frac{dn}{dx} = -\frac{j_D}{D}$ soit $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + A$.

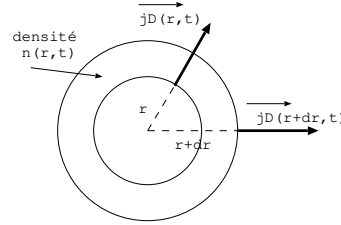
On utilise les conditions aux limites: $n(x=0) = n(0) = A$ donc $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + n(0)$.

3. On a $n(x=L) = n(L) = -\frac{j_D L}{D} + n(0)$, on en déduit $D = \frac{j_D L}{n(0) - n(L)} = 2,36.10^{-5} \text{ m}^2.s^{-1}$: c'est le bon ordre de grandeur pour la diffusion dans un gaz.

4. Le nombre de molécules de CO_2 qui traversent une surface S pendant $\Delta t = 60 \text{ s}$ s'écrit $N = j_D S \Delta t = 4,61.10^{-16}$ particules.

III. A l'extérieur d'un noyau sphérique

1. Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ s'écrit $d\tau = 4\pi r^2 dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur).



2. Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r + dr$ soit $\delta N_s = j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant t est $dN(t) = n(r, t)4\pi r^2 dr$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant $t + dt$ est $dN(t) = n(r, t + dt)4\pi r^2 dr$.

3. La conservation du nombre de neutrons s'écrit $dN(t + dt) - dN(t) = \delta N_e - \delta N_s$.

d'où $n(r, t + dt)4\pi r^2 dr - n(r, t)4\pi r^2 dr = -(j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 - j_D(r, t)r^2)4\pi dt$

avec dt et dr petits on fait les DL: $\frac{\partial n}{\partial t}4\pi r^2 dr dt = -\frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r}4\pi dr dt$

soit $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r}$

4. En régime stationnaire $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r} = 0$ ce qui signifie que $j_D(r, t)r^2 = A$ une constante

soit $j_D(r, t) = \frac{A}{r^2}$. Par identification avec l'énoncé $n = 2$.

5. En régime stationnaire, le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s$ soit $j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt = j_D(r, t)4\pi r^2 dt$ et $j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 = j_D(r, t)r^2$ donc la fonction $j_D(r, t)r^2$ est constante.

IV. Correction : oxydation d'un métal

1. $L(t)$ varie très lentement donc sur une petite échelle de temps, la longueur $L(t)$ peut être considérée constante d'où l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire.

On considère un cylindre d'axe Ox compris entre x et $x + dx$. Entre t et $t + dt$, le nombre de particules qui entrent dans ce cylindre est $j(x, t)Sdt$ et le nombre de particules qui en sortent est $j(x + dx, t)Sdt$. En régime stationnaire ces nombres de particules sont égaux soit $j(x) = j(x + dx) = \text{constante}$.

On applique la loi de Fick $\vec{j} = j\vec{e}_x = -D\overrightarrow{\text{grad}}n$ soit $j = -D\frac{dn}{dx} = \text{constante}$. On a donc $\frac{dn}{dx}$ qui est constant (soit $n(x)$ est une fonction affine) et qui s'écrit $\frac{n(x=L) - n(x=0)}{L} = \frac{C_1 - C_0}{L}$.

Ainsi on a $j = D\frac{C_0 - C_1}{L} > 0$.

2. Les atomes de métal qui diffusent dans la couche d'oxyde et qui arrivent en $x = L$ s'oxydent et font augmenter le volume de la couche de métal.

Un atome oxydé occupe le volume Ω et ici il y a pendant dt , $jSdt$ atomes de métal qui diffusent à travers la surface en $x = L$, donc pendant dt le volume de la couche de métal augmente de $jSdt\Omega = D\frac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega$.

Du point de vue macroscopique, le volume de la couche de métal à l'instant t est $L(t)S$ et le volume de cette couche de métal à l'instant $t + dt$ est $SL(t + dt)$. Donc la variation de volume de la couche de métal est $SL(t + dt) - SL(t) = S\frac{dL}{dt}dt$.

On écrit que les deux expressions de variation de volume sont égales soit $D\frac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega = S\frac{dL}{dt}dt$ et on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $L(t)$: $\frac{dL}{dt} = \Omega D\frac{C_0 - C_1}{L}$. On la résout en séparant les variables soit:

$$\int_0^{L(t)} LdL = \int_0^t \Omega D(C_0 - C_1)dt \text{ d'où } L(t)^2 = \Omega D(C_0 - C_1)t \text{ et donc } L(t) = \sqrt{2\Omega D(C_0 - C_1)t}.$$

3. On évalue le temps de croissance de la couche c'est d'après l'étude précédente: $t_c = \frac{L(t)^2}{2\Omega D(C_0 - C_1)}$.

On évalue le temps de diffusion d'un atome de métal dans la couche d'oxyde à partir de l'équation de diffusion: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ donne $\frac{1}{t_d} = \frac{D}{L(t)^2}$ donc $t_d = \frac{L(t)^2}{D}$.

On peut considérer que le régime est quasi stationnaire à condition que le temps de diffusion soit très grand devant le temps d'accroissement de la couche $t_d \gg t_c$ conduit à $C_0 - C_1 \gg \frac{1}{2\Omega}$.