

# TD diffusion thermique

## I. Equilibre thermique d'une brebis

On modélise une brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme  $T_{eq} = 39^{\circ}C$  de longueur  $L = 100\text{ cm}$  et de section carrée de côté  $H = 30\text{ cm}$ . Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de  $e = e_M = 10\text{ cm}$  de laine avant la tonte à  $e = e_m = 0,5\text{ cm}$  après la tonte. On donne la conductivité thermique de la laine  $\lambda_{laine} = 0,040\text{ SI}$ .

1. Exprimer la résistance  $R_{diff}$  de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques: la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

2. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique égal à  $j_{cc} = h(T_{ext} - T_{air})$  où  $T_{ext}$  est la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température  $T_{air}$ . On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à  $h = 4,0\text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ . En déduire la résistance de conducto-convection  $R_{cc}$  à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

3. Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire  $R_r$ . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance  $P_r$  due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme  $P_r = KA(T_{ext} - T_{air})$  où  $A$  est l'aire de la surface extérieure de la brebis prise pour  $e = 0$  et  $K$  une constante de valeur  $K = 5,0\text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ . Exprimer et calculer la résistance thermique de rayonnement  $R_r$ .

4. Faire un schéma électrique équivalent des échanges thermiques de la brebis de température  $T_{eq}$  avec l'air extérieur de température  $T_{air}$ . On note  $T_{ext}$  la température de surface de la brebis. Évaluer numériquement les deux valeurs  $R_1$  et  $R_2$  des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

En déduire les puissances  $P_1$  et  $P_2$  que doit fournir le métabolisme d'une brebis non tondue ou d'une brebis tondue pour maintenir sa température interne constante pour une température de l'air de  $10^{\circ}C$ . Calculer  $T_{ext}$  dans les deux cas.

Réponses :  $R_1 = 1,88\text{ K.W}^{-1}$ ,  $R_2 = 0,17\text{ K.W}^{-1}$ ,  $R_{cc} = 0,181\text{ K.W}^{-1}$ ,  $R_r = 0,145\text{ K.W}^{-1}$ ,  $P_1 = 18\text{ W}$  et  $P_2 = 207\text{ W}$

## II. Température d'un mammifère

On modélise un mammifère par une boule de rayon  $a$  et de centre  $O$ . Son métabolisme produit une puissance volumique uniforme  $p$  qui lui permet de maintenir une température  $T_i$  uniforme dans tout l'organisme. Le mammifère est plongé dans un fluide de conductivité thermique  $\lambda$  dont la température très loin du mammifère est uniforme et vaut  $T_0 = 20^{\circ}C < T_i$ . Le vecteur densité de courant thermique dans le fluide s'écrit  $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques avec  $r = OM$ .

1. Préciser le signe de  $j_Q$  en expliquant la situation.

2. Exprimer, en fonction de  $j_Q(r)$  et de  $r$ , la puissance thermique  $P_{th}(r)$  perdue à travers une sphère de rayon  $r \geq a$ . Montrer que  $P_{th}$  ne dépend pas de  $r$ .

3. Déduire d'un bilan d'énergie appliqué au mammifère l'expression de  $P_{th}$  en fonction de  $p$  et  $a$ .

4. Ecrire la loi de Fourier et déduire des questions précédentes que la température dans le fluide s'écrit

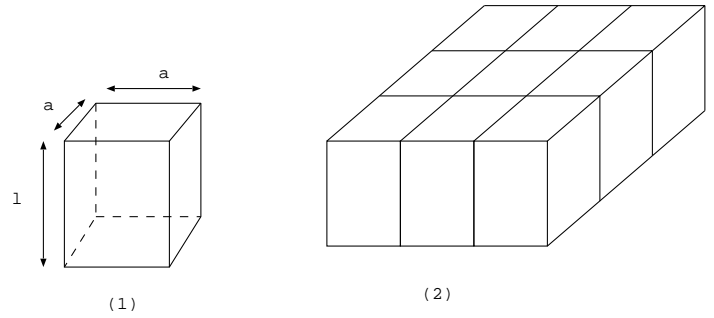
$$T(r) = T_0 + \frac{a^3 p}{3\lambda r} \quad \text{grad } T = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r.$$

5. En déduire la température cutanée. Soit un mammifère pour lequel  $a = 25\text{ cm}$  de température cutanée  $T_c = 30^{\circ}C$ . Déterminer  $p$  selon que le mammifère vit dans l'air ou dans l'eau. Données:  $\lambda_{air} = 5\text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$  et  $\lambda_{eau} = 500\text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$ . Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins?

Réponses: 3-  $P_{th} = \frac{4\pi a^3}{3} p$  5-  $p_{air} = 9,6\text{ kW.m}^{-3}$  et  $p_{eau} = 960\text{ kW.m}^{-3}$

### III. Assemblée de manchots

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée, de côté  $a = 0,10 \text{ m}$  et de hauteur  $l = 0,50 \text{ m}$  (figure (1)). Le manchot, animal à sang chaud, maintient sa température interne  $T_i$  constante au moyen d'un apport métabolique  $\mathcal{P}_1$  qui compense les pertes thermiques par conduction thermique au travers d'un revêtement de plumes d'épaisseur  $e = 1,0 \text{ cm}$  et de conductivité  $\lambda$ , face à la température extérieure  $T_e = -20^\circ\text{C}$  (y compris au niveau du sol).

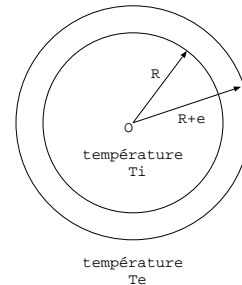


1. Calculer l'aire du corps du manchot  $A_1$ .
2. Exprimer les pertes thermiques d'un manchot isolé à travers son revêtement de plumes d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Le métabolisme du manchot isolé lui fournit une puissance  $\mathcal{P}_1 = 50 \text{ W}$  pour maintenir sa température interne constante et égale à  $T_i = 37^\circ\text{C}$ . En déduire la valeur numérique de  $\lambda$ .
3. Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots se serrent comme représenté sur la figure (2). Le pavage étant parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. Calculer l'aire  $A_9$  exposée à la température  $T_e$  et la puissance métabolique  $\mathcal{P}_9$  nécessaire au maintien de la température interne de ces neuf manchots. En déduire la puissance moyenne fournie par le métabolisme d'un manchot dans ce groupe de 9 manchots qui se serrent les uns contre les autres (comportement social thermorégulateur).
4. On considère un manchot isolé dont le métabolisme ne produit plus que la puissance  $P_1 = 45 \text{ W}$ . On note  $c$  la capacité thermique massique de ce manchot et  $R_{th}$  la résistance thermique de l'épaisseur  $e$  de plumes. La température extérieure est  $T_{ext} = -20^\circ\text{C}$ . Déduire du premier principe de la thermodynamique appliqué au manchot entre  $t$  et  $t + dt$  que  $T_i(t)$  (la température intérieure du manchot) vérifie une équation différentielle de la forme  $\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$ . Exprimer  $\tau$  et  $T_f$  en fonction de  $P_1$ ,  $R_{th}$  et des notations de l'énoncé. Calculer  $R_{th}$ ,  $T_f$  et  $\tau$  pour  $\lambda = 0,04 \text{ SI}$ ,  $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  et  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  la masse volumique du manchot. En déduire  $T_i(t)$  et représenter la courbe associée à cette fonction. Que représentent  $T_f$  et  $\tau$ ?

Réponses:  $A_1 = 0,22 \text{ m}^2$ ,  $\lambda = 4,0.10^{-2} \text{ SI}$ ,  $\mathcal{P}_9 = 180 \text{ W}$ ,  $R_{th} = 1,14 \text{ SI}$ ,  $T_f = 31^\circ\text{C}$ ,  $\tau = 2,38.10^4 \text{ s}$

### IV. Chouette harfang

On modélise le corps de l'oiseau par une sphère homogène de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$ , maintenue à la température corporelle  $T_i$ . Il est enveloppé par une couche isolante d'épaisseur  $e$  représentant le plumage. On étudie la conduction thermique dans le plumage de conductivité  $\lambda$  avec comme conditions aux limites :  $T(r = R) = T_i$  et  $T(r = R + e) = T_e$ . La température  $T_e$  est la température extérieure inférieure à  $T_i$ . Il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du plumage.

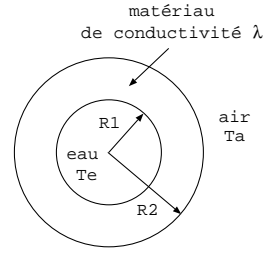


1. Déterminer la direction, le sens et la (ou les) variables du vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_Q$ .
2. Exprimer le flux thermique perdu à travers une sphère de rayon  $r$  avec  $R < r < R + e$  et de centre  $O$ . Montrer qu'en régime permanent ce flux ne dépend pas de  $r$ .
3. Déduire de la loi de Fourier et des résultats de la question précédente, l'expression de la puissance thermique dissipée par le plumage. On donne  $\text{grad } T = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ .
4. On suppose  $e \ll R$ . On note  $P_m$ , la puissance produite par le métabolisme de la chouette. Exprimer l'épaisseur  $e$  de la couche de plume pour que la température interne de la chouette reste constante.

Réponse:  $e = \frac{4\pi R^2 \lambda (T_i - T_e)}{P_m}$

## V. Canalisation d'eau

De l'eau circule dans une canalisation de rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ . La conductivité thermique du matériau de la canalisation est notée  $\lambda$ . On suppose la température de l'eau constante dans la canalisation  $T_e = 65^\circ C$ . L'air extérieur est à la température  $T_a = 20^\circ C$ . On se place en régime permanent et on néglige tout phénomène de convection dans l'eau et dans l'air extérieur.



1. Donner l'expression générale de  $\vec{j}_Q$  en coordonnées cylindriques. En déduire, en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $j_Q(r)$ , l'expression de  $P_{th}(r)$ , la puissance thermique perdue par le cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $r$  tel que  $R_1 < r < R_2$ .

On suppose que  $T$  et  $\vec{j}_Q$  ne dépendent que de  $r$ . On donne  $\vec{\text{grad}} T = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ .

- Déduire de la conservation de l'énergie sur un système bien choisi que  $P_{th}$  ne dépend pas de  $r$ .
- Déduire de la loi de Fourier et des résultats précédents l'expression de  $P_{th}$  en fonction de  $T_e - T_a$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\lambda$  et  $L$ .
- On considère une longueur de canalisation  $L = 50 \text{ m}$  avec  $R_1 = 6 \text{ mm}$  et  $R_2 = 7 \text{ mm}$ , de conductivité thermique  $\lambda = 400 \text{ SI}$ . Estimer l'énergie thermique perdue en une heure.

Réponse : 
$$P_{th} = \frac{\lambda 2\pi L (T_e - T_a)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

## VI. Chauffage d'une pièce par une PAC

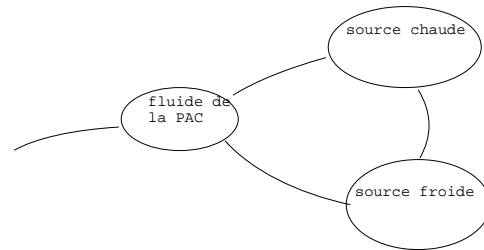
Il fait une température  $T_{int} = 20^\circ C$  à l'intérieur d'une salle à manger alors que la température extérieure est  $T_{ext} = 3^\circ C$ . On étudie les fuites thermiques en régime stationnaire à travers les murs et les baies vitrées de la salle à manger. Les murs sont constitués d'une épaisseur  $e_b = 20 \text{ cm}$  de béton recouvert d'une seule épaisseur  $e_p = 10 \text{ cm}$  de polystyrène expansé. La surface totale du mur entre la salle à manger et l'extérieur est  $S = 60 \text{ m}^2$ . Ce mur est percé de quatre fenêtres en simple vitrage, constituées d'une épaisseur  $e_v = 1 \text{ cm}$  de verre. Chaque fenêtre a pour surface  $s = 2 \text{ m}^2$ .

On donne: pour le béton et pour le verre :  $\lambda = 1 \text{ SI}$  et pour le polystyrène  $\lambda_p = 4.10^{-3} \text{ SI}$ .

1. Utiliser un modèle électrique pour calculer la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}$  liée aux fuites thermiques à travers le mur et les fenêtres. On note  $R_{th}$ , la résistance thermique équivalente de l'ensemble constitué des murs et de la fenêtre. AN: Calculer  $R_{th}$  et  $P_{th}$ .

Pour chauffer la pièce, on utilise une pompe à chaleur qui échange les puissances thermiques  $\mathcal{P}_c$  et  $\mathcal{P}_f$ , avec les sources chaude et froide et qui reçoit la puissance mécanique  $\mathcal{P}_m$ . Toutes ces puissances sont ici des grandeurs positives.

2. Compléter le schéma en ajoutant les puissances  $\mathcal{P}_f$ ,  $\mathcal{P}_c$  et  $\mathcal{P}_m$ ,  $\mathcal{P}_{th}$  et les sens réels de ces puissances échangées et préciser qui sont les sources froide et chaude. L'efficacité de la PAC est  $e = 3$ . On cherche la puissance mécanique  $\mathcal{P}_m$  à fournir à la PAC pour maintenir la température de la pièce constante. Appliquer le premier principe de la thermodynamique à la source chaude et en déduire  $\mathcal{P}_m$ .



3. La puissance mécanique de la PAC est  $\mathcal{P}'_m = 3 \text{ kW}$ . Justifier que la température de la pièce va diminuer. On note  $C$  la capacité thermique de l'air de la pièce et  $T_{int}(t)$  sa température. Par application du premier principe à l'air de la pièce montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $T_{int}$  se met sous la forme: 
$$\frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}}{\tau} = \frac{T_m}{\tau}$$

Exprimer  $\tau$  et  $T_m$  en fonction des données. Exprimer  $T_{int}(t)$  et tracer la courbe associée à cette fonction. Que représente  $T_m$ ?

Réponses: 1-  $\mathcal{P}_{th} = 13,6 \text{ kW}$  2-  $\mathcal{P}_m = 4,5 \text{ kW}$  3-  $\tau = R_{th}C$  et  $T_m = T_{ext} + eR_{th}\mathcal{P}_m$

## VII. Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement cylindrique de rayon  $R$  de longueur  $L$  grande devant  $R$  est plongée dans un fluide en mouvement de température  $T_F$ . On négligera la chaleur perdue par l'extrémité de l'ailette. La base de l'ailette est en contact avec un thermostat qui impose la température  $T(x=0) = T_0$ .

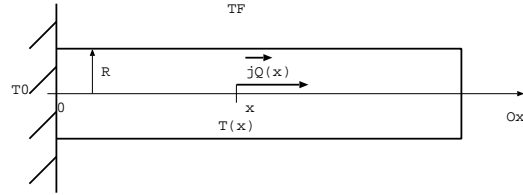
Dans l'ailette on observe un phénomène de diffusion thermique de vecteur densité de courant  $\vec{j}_Q = j_Q(x)\vec{e}_x$ . L'ailette a pour conductivité thermique  $\lambda$ .

Sur la surface latérale de l'ailette, on observe le phénomène de conducto-convection qui suit la loi de Newton :  $j_{cc}(x) = h(T(x) - T_F)$ , où  $j_{cc}$  est le flux thermique surfacique sortant de l'ailette à l'abscisse  $x$  en régime stationnaire,  $T(x)$  la température de l'ailette à l'abscisse  $x$  et  $h$  le coefficient de transfert convecto-diffusif.

1. Montrer que  $T(x)$  vérifie une équation différentielle de la forme  $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_F}{\delta^2}$ . Exprimer  $\delta$  en fonction de  $\lambda$ ,  $h$  et  $R$  et préciser son unité.

2. En déduire l'expression de  $T(x)$ .

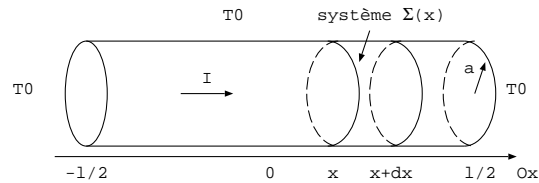
3. En déduire la puissance thermique dégagée par la surface latérale de l'ailette.



Réponses : 1-  $\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$  2-  $T(x) = T_F + (T_0 - T_F)e^{-x/\delta}$  3-  $P = h\delta(T_0 - T_F)$

## VIII. Anémomètre à fil chaud (dur)

Un anémomètre à fil chaud est modélisé par un fil électrique de rayon  $a$ , de longueur  $l$  et de résistance  $R_0$  parcouru par un courant électrique  $I$ . On souhaite étudier la température  $T(x)$  dans le fil compris entre  $x = -l/2$  et  $x = +l/2$  en régime stationnaire.



Pour déterminer  $T(x)$  on réalise un bilan énergétique sur la portion de fil notée  $\Sigma(x)$ , comprise entre  $x$  et  $x + dx$  en prenant en compte:

- la conduction thermique (on note  $\lambda$  la conductivité thermique du fil)

- la convection forcée entre le fil et l'air (on crée un courant d'air pour refroidir le fil) : le transfert thermique cédé le système  $\Sigma(x)$  à l'air pendant la durée élémentaire  $dt$  a pour expression  $\delta Q_{conv} = h(T_f(x) - T_0)S_{lat}dt$  où  $S_{lat}$  désigne la surface latérale élémentaire du système  $\Sigma(x)$  en contact avec l'air de température  $T_0$ .

1. Exprimer le transfert thermique  $\delta Q_{cond}$  reçu par conduction par le système élémentaire de fil compris entre  $x$  et  $x + dx$  pendant la durée  $dt$ .

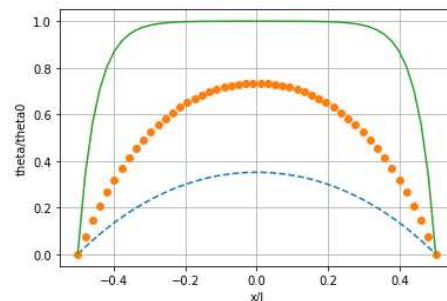
2. Exprimer le travail électrique  $\delta W_e$  reçu par le système élémentaire pendant  $dt$ . Le tronçon de longueur  $dx$  a pour résistance  $\frac{R_0}{l}dx$ .

3. On pose  $\theta(x) = T(x) - T_0$ . Montrer que  $\theta(x)$  vérifie une équation de la forme:  $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\theta}{\delta^2} = -K$ . Exprimer  $\delta$  et  $K$  en fonction des données.

4. Exprimer  $\theta(x)$  en fonction de  $l$ ,  $\delta$ ,  $K$  et  $x$ , en considérant que les températures aux extrémités du fil sont égales à  $T_0$ . En déduire la puissance thermique cédée par convection, par le fil de longueur  $l$ , à l'air.

5. On donne les courbes  $\frac{\theta(x)}{K\delta^2}$  en fonction de  $x/l$  pour les différents cas:  $\delta = l/2$  (style -) ,  $\delta = l/4$  (style oo) et  $\delta = l/20$ . En déduire comment il faut choisir  $\delta$  pour avoir une température uniforme dans l'anémomètre.

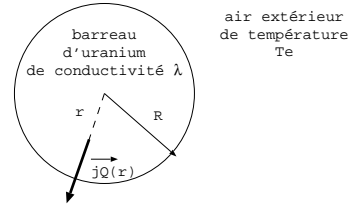
Réponses: 3-  $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ ,  $K = \frac{R_0 I^2}{\lambda \pi a^2 l}$  4-  $\theta(x) = K\delta^2(1 - \frac{\cosh(\frac{x}{\delta})}{\cosh(\frac{l}{2\delta})})$



## IX. Réactions nucléaires

La réaction nucléaire qui se produit dans un barreau d'uranium dégage une puissance volumique  $p_v = 700 \text{ MW.m}^{-3}$ . L'uranium a pour conductivité thermique  $\lambda = 27 \text{ SI}$ . L'étude se fait en régime stationnaire.

L'uranium est contenu dans un barreau d'axe  $Oz$ , de rayon  $R = 10 \text{ mm}$  et une longueur  $L$  suffisante pour que l'on néglige les effets de bord. On note  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ , le vecteur densité de courant thermique en un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  dans le barreau. L'air extérieur est à la température  $T_e = 200^\circ \text{ C}$ .

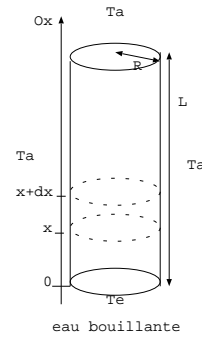


- Déduire de la loi de Fourier et d'un bilan d'énergie au système élémentaire compris entre les cylindres de rayons  $r$  et  $r+dr$  (avec  $r+dr < R$ ) et de longueur  $L$ , que l'on a  $\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) = -\frac{p_v r}{\lambda}$ . On donne  $\vec{\text{grad}} T = \frac{dT}{dr}\vec{e}_r$ .
- Calculer la température maximale dans le barreau. En quels points est-elle atteinte?

Réponses :  $T(r) = \frac{-p_v}{4\lambda}(r^2 - R^2) + T_e$  et  $T_{max} = 850^\circ \text{ C}$ .

## X. Détermination de la conductivité thermique d'un matériau

On considère une tige métallique de conductivité thermique  $\lambda$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . Cette tige est placée à une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau en ébullition à la température  $T_e = 373 \text{ K}$ . Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température  $T_a = 293 \text{ K}$ . Soit  $h$  le coefficient de transfert convecto-diffusif. On rappelle la loi de Newton :  $j_{cc} = h(T(x) - T_a)$ , où  $j_{th}$  est le vecteur densité de flux thermique lié à la convection sortant de la tige à l'abscisse  $x$  en régime stationnaire et  $T(x)$  la température de la tige à l'abscisse  $x$ .



- Effectuer un bilan d'énergie au système élémentaire compris entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$  pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$ .
- En déduire  $T(x)$  pour une tige très longue ( $L$  très grand):  $T(x) = T_a + (T_e - T_a)e^{-x/\delta}$ . Exprimer  $\delta$ .
- On compare dans les conditions précédentes deux tiges de dimensions identiques l'une constituée de cuivre de conductivité thermique  $\lambda_{Cu} = 390 \text{ SI}$  et l'autre en étain de conductivité thermique  $\lambda_{Sn}$  inconnue. Chaque tige est recouverte de parafine dont la température de fusion est  $333 \text{ K}$ . On observe sur chaque tige la fusion en  $x_1 = 15,6 \text{ cm}$  pour le cuivre et  $x_2 = 6,4 \text{ cm}$  pour l'étain. En déduire  $\lambda_{Sn}$ .

Réponses : 1-  $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}T = -\frac{2h}{\lambda R}T_a$  2-  $\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$  3-  $\lambda_{Sn} = \lambda_{Cu} \frac{x_2^2}{x_1^2}$