Correction du DS 4 de physique

I. **Correction: thermique d'une plaque de combustible nucléaire**

A.1.1- La puissance thermique produite par le combustible est égale à la puissance thermique volumique multipliée par le volume de la plaque soit $P_{th} = \phi_v 2eHl = 150\ kW$. Attention de convertir ϕ_v en $W.m^{-3}$ car elle est donnée en $W.cm^{-3}$ soit $\phi_v = 500.10^6\ W.m^{-3}$.

A.1.2- On utilise l'équation de diffusion thermique en régime stationnaire soit pour $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ avec $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2}$. On doit donc résoudre l'équation $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{\phi_v}{\lambda}$ soit après une première intégration par rapport à x on a $\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + A$ et après une deuxième intégration par rapport à x on a $T(x) = -\dfrac{\phi_v x^2}{2\lambda} + Ax + B$.

On trouve A et B avec les conditions aux limites soit $T(x = -e) = T_1 = -\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} - Ae + B$ et $T(x = e) = T_2 = -\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} + Ae + B$.

On fait la somme des équations: $T_1 + T_2 = -\dfrac{\phi_v e^2}{\lambda} + 2B$ soit $B = \dfrac{T_1 + T_2}{2} + \dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda}$.

On soustrait les deux équations: $T_2 - T_1 = 2Ae$ soit $A = \dfrac{T_2 - T_1}{2e}$.

On a donc $T(x) = -\dfrac{\phi_v(x^2 - e^2)}{2\lambda} + \dfrac{(T_2 - T_1)x}{2e}\dfrac{T_1 + T_2}{2}$.

La température est maximale pour $\dfrac{dT}{dx} = 0 = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + A = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + \dfrac{T_2 - T_1}{2e}$ soit pour $x_{max} = \dfrac{\lambda(T_2 - T_1)}{2e\phi_v}$.

A.1.3- Pour $T_1 = T_2 = 540\ K$, on a $x_{max} = 0$ (c'est normal car la courbe $T(x)$ a pour axe de symétrie $x = 0$ puisque $T(x = +e) = T(x = -e)$). On en déduit $T_{max} = T(x_{max}) = +\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} + \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 814\ K$.

A.1.4- Pour $T_1 = 580\ K$ et $T_2 = 540\ K$, on a $x_{max} = -73\ \mu K < 0$ (x_{max} est du côté de la température la plus élevée). Les fluides sont là pour refroidir les bords de la plaque. Ainsi les fluides arrivent en haut de la plaque avec une température plus élevée que leur température en bas de la plaque, puisqu'ils ont reçu du transfert thermique de la part de la plaque de combustible.

Le fluide 1 reçoit plus de transfert thermique que le fluide 2 puisqu'il atteint une température plus élevée, on peut en déduire que la vitesse d'écoulement du fluide 2 est plus grande que la vitesse du fluide 1, le fluide 2 va plus vite et donc il reste moins longtemps en contact avec la plaque et se réchauffe moins bien que le fluide 1.

A.2.1- En régime permanent sans production d'énergie dans le solide, l'équation de diffusion s'écrit $\Delta T = 0$ soit pour $T = T(x)$, on doit résoudre l'équation $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$ soit après une première intégration par rapport à x on a $\dfrac{dT}{dx} = C1$ et après une deuxième intégration par rapport à x on a $T(x) = C1x + C2$: la température est donc une fonction affine de x: le profil 3 ne peut pas convenir.

L'énoncé nous dit qu'il n'y a pas de résistance thermique entre les deux solides, cela implique que la température est continue en $x = e_1$: le profil 4 ne peut pas convenir.

La loi de Fourier s'écrit $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \dfrac{dT}{dx}\vec{e_x}$. On a donc $j_D = -\dfrac{dT}{dx}$ où $\dfrac{dT}{dx}$ représente la pente de la tangente à la courbe $T(x)$, ici la courbe $T(x)$ est une droite donc $\dfrac{dT}{dx}$ est la pente de la droite.

Le vecteur densité de courant thermique est continu, il a donc le même sens dans les solides A et B: le profil 2 ne peut pas convenir car $j_D < 0$ pour $x < e_1$ et $j_D > 0$ pour $x > e_1$ (j_D est orienté des fortes vers les faibles températures).

On en déduit que le profil 1 convient.

On a $j_D(x < e_1) = -\lambda_A \dfrac{T_1 - T_0}{e_1}$ et $j_D(x > e_1) = -\lambda_B \dfrac{T_2 - T_1}{e_2}$. Le vecteur densité de courant est le même dans les deux solides donc $-\lambda_A \dfrac{T_1 - T_0}{e_1} = -\lambda_B \dfrac{T_2 - T_1}{e_2}$.

Après calcul on trouve $T_1 = \dfrac{\frac{\lambda_B T_2}{e_2} + \lambda_A T_1 e_1}{\frac{\lambda_B}{e_2} + \lambda_A e_1}$.

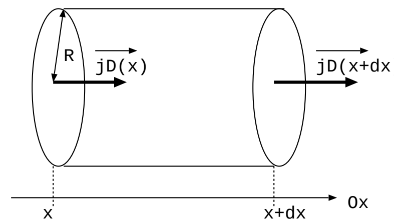
II. **Correction : diffusion dans le corps humain**

1.

1.a. Unités : $[j] = m^{-2}.s^{-1}$ et $[\gamma] = [\dfrac{j}{n}] = \dfrac{m^{-2}.s^{-1}}{m^{-3}} = m.s^{-1}$: homogène à une vitesse.

1.b. Nombre de particules de nutriment qui entrent dans le système entre t et $t+dt$: $\delta N_e = j_D(x)\pi R^2 dt$

Nombre de particules de nutriment qui sortent du système entre t et $t+dt$: $\delta N_s = j_D(x+dx)\pi R^2 dt + j 2\pi R dx dt$ (il y a des particules qui sortent par diffusion selon Ox et des particules qui sortent par la paroi latérale).



En régime stationnaire, le nombre de particules qui entrent est égal au nombre de particules qui sortent soit: $j_D(x)\pi R^2 dt = j_D(x+dx)\pi R^2 dt + j 2\pi R dx dt$ ou encore $0 = \dfrac{dj_D}{dx} dx \pi R^2 dt + \gamma(n_c(x) - n_{org}) 2\pi R dx dt$ soit après simplification $0 = \dfrac{dj_D}{dx} + \dfrac{2\gamma}{R}(n_c(x) - n_{org})$.

2. La loi de Fick s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{\mathrm{grad}} n_c = -D\dfrac{dn_c}{dx}\overrightarrow{e_x}$. Cette loi traduit que les particules diffusent des fortes vers les faibles concentrations.

On obtient l'équation de diffusion en combinant la loi de Fick et l'équation de conservation de la matière, on trouve $\dfrac{d^2 n_c}{dx^2} - \dfrac{2\gamma}{RD}(n_c(x) - n_{org}) = 0$. Par identification $\delta = \sqrt{\dfrac{RD}{2\gamma}}$.

On résout pour n_{org} constante. L'équation s'écrit $\dfrac{d^2 n_c}{dx^2} - \dfrac{1}{\delta^2} n_c = \dfrac{norg}{\delta^2}$. La solution particulière est $n_c = n_{org}$ et la solution générale est $n_c = Ae^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{+\frac{x}{\delta}}$.

D'où la solution $n_c(x) = n_{org} + Ae^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{+\frac{x}{\delta}}$.

Les conditions aux limites sont telles que n_c ne diverge pas pour x grand donc $B = 0$ et $n_c(0) = n_0 = n_{org} + A$ donc $A = n_0 - n_{org}$. Soit $n_c(x) = n_{org} + (n_0 - n_{org})e^{-\frac{x}{\delta}}$.

2.a. On a $|\dfrac{(n_0 - n_{org})e^{-\frac{L}{\delta}}}{n_0 - K}| = e^{-\frac{L}{\delta}} > 0,3$ pour $-\dfrac{L}{\delta} > \ln 0,3$ ou encore $\dfrac{L}{\delta} < -\ln 0,3$ soit $\delta > \dfrac{L}{-\ln 0,3}$.

2.b. Le nombre de nutriments qui traversent la surface latérale du capillaire par unité de temps se calcule en faisant j fois une surface. Cette relation ne s'applique que pour une surface pour laquelle j est uniforme soit ici la surface du système élémentaire compris entre x et $x + dx$. On obtient le nombre totale de nutriment sur tout le capillaire en intégrant ensuite que le longueur du capillaire soit:

$\displaystyle\int_{x=0}^{x=L} j 2\pi R dx = \int_{x=0}^{x=L} \gamma(n_c(x) - n_{org}) 2\pi R dx = \int_{x=0}^{x=L} \gamma(n_0 - n_{org})e^{-\frac{x}{\delta}} 2\pi R dx = \gamma(n_0 - n_{org}) 2\pi R\delta(-e^{-L/\delta} + 1) \approx \gamma(n_0 - n_{org}) 2\pi R\delta$.

III. **Correction : le manchot**

Q10- La norme du vecteur densité de courant représente l'énergie par unité de surface et de temps ou encore la puissance transférée par unité de surface. L'unité est: $W.m^{-2}$.

Q11- La loi qui s'écrit $\overrightarrow{j}_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{d\rho}\overrightarrow{U}_\rho$ est la loi de Fourier, le signe $-$ signifie que le transfert thermique se fait des fortes vers les faibles températures.

Q12- Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons ρ et $\rho + d\rho$. En régime stationnaire, la puissance thermique reçue par le système est égale à la puissance perdue par le système car sa température est constante on a donc: $j_{th}(\rho)2\pi\rho l = j_{th}(\rho + d\rho)2\pi(\rho + d\rho)l$. On en déduit que $j_{th}(\rho)\rho = A$ (une constante).

On applique la loi de Fourier soit $j_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{d\rho} = \dfrac{A}{\rho}$ ou encore $\dfrac{dT}{d\rho} = \dfrac{-A}{\lambda\rho}$. On intègre par rapport à ρ soit: $T(\rho) = \dfrac{-A}{\lambda}\ln\rho + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites:

$T(\rho = R_1) = \dfrac{-A}{\lambda}\ln R_1 + B = T_1$

$T(\rho = R_2) = \dfrac{-A}{\lambda}\ln R_2 + B = T_2$

On fait la différence $T_1 - T_2 = \dfrac{-A}{\lambda}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$ d'où $\dfrac{-A}{\lambda} = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

De la première équation on tire $B = T_1 + \dfrac{A}{\lambda}\ln R_1$

En remplaçant A et B par leurs expressions, on obtient $T(\rho) = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})}\ln(\dfrac{\rho}{R_1}) + T_1$.

Q13- La résistance thermique se définit par analogie avec la loi d'Ohm électrique $U = V_1 - V_2 = Ri$ où $U = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel qui provoque le mouvement des électrons et où i est le flux de charges. En thermique, $\Delta T = T_1 - T_2$ provoque le transfert d'énergie (c'est l'analogue de la tension) et ϕ_{th} est le flux d'énergie.

On a donc $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\phi_{th}}$.

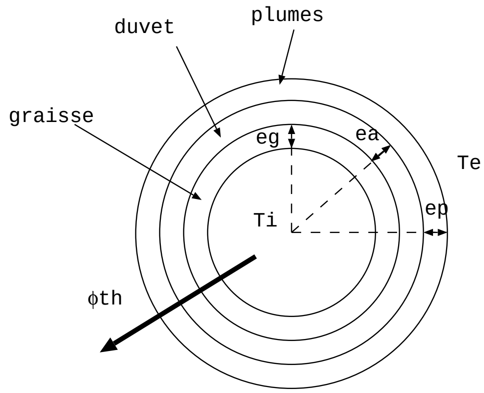
On exprime $\phi_{th} = j_{th}(\rho)2\pi\rho l = -\lambda\dfrac{dT}{d\rho}2\pi\rho l = -\lambda\dfrac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})}\dfrac{1}{\rho}2\pi\rho l = -\lambda\dfrac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})}2\pi l = \lambda\dfrac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}2\pi l$.

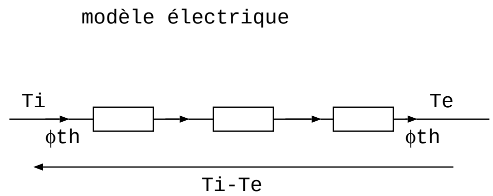
D'où la résistance thermique $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\phi_{th}} = \dfrac{1}{2\pi l\lambda}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$.

Q14- Le volume d'un manchot modélisé par un cylindre s'écrit $V = \pi R^2 L$, on déduit donc l'expression de sa masse en utilisant la masse volumique $m = \mu V = \mu\pi R^2 L$ d'où $R = \sqrt{\dfrac{m}{\mu\pi L}} =$ (on prend $\mu = 10^3\ kg.m^{-3}$ en considérant que la masse volumique du manchot est égale à celle de l'eau).

Q15- On considère le système composé du manchot: en régime stationnaire, la température du manchot est constante donc la puissance reçue par le manchot (soit $\mathcal{P}_m$ produite par don métabolisme) est égale à la puissance perdue (soit ϕ_{th} perdue par diffusion thermique à travers sa graisse et ses plumes). On a donc $\mathcal{P}_m = \phi_{th}$.

Q16- Les couches de graisse et de plumes sont parcourues par la même puissance thermique et soumises à des différences de températures différentes. La puissance thermique est l'analogue du courant donc les trois résistances associées aux différentes couches de protection du manchot sont parcourues par le même courant, elles sont en série. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances thermiques.





La résistance thermique de la couche de graisse est $R_g = \dfrac{1}{\lambda_g 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g}{R})$

La résistance thermique de la couche de duvet est $R_a = \dfrac{1}{\lambda_a 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g+e_a}{R+e_g)}$

La résistance thermique de la couche de graisse est $R_p = \dfrac{1}{\lambda_p 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g+e_a+e_p}{R+e_g+e_a})$.

La résistance équivalente est $R_{th1} = R_g + R_a + R_p$. AN: $R_{th1} = 1,07\ K.W^{-1}$.

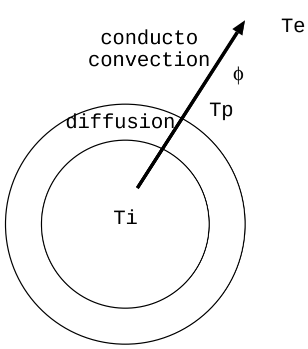
Q17- La puissance thermique perdue par conducto-convection est $\phi_{cc} = j_{cc}S = h(T_p - T_e)S$. La résistance thermique associée s'obtient comme précédemment par l'analogie avec la loi d'Ohm électrique soit $R_{cc} = \dfrac{T_p - T_e}{\phi_{cc}} = \dfrac{1}{hS}$.

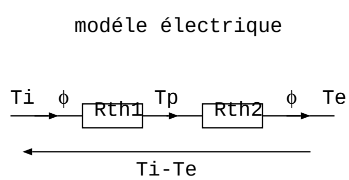
Q18- La puissance thermique perdue par rayonnement est $\phi_r = 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$. La résistance associée s'obtient par l'analogie avec la loi d'Ohm électrique soit $R_r = \dfrac{T_p - T_e}{\phi_r} = \dfrac{1}{4\sigma T_e^3}$.

Q19- Les résistances thermiques liées aux transferts conducto-convectifs et radiatifs sont soumises à la même différence de température soit à la même tension par analogie avec l'électricité, donc les résistances sont associées en parallèle.

La résistance thermique équivalente est telle que $\dfrac{1}{R_{th2}} = \dfrac{1}{R_r} + \dfrac{1}{R_{cc}} = 4\sigma T_e^3 + hS$ soit $R_{th2} = \dfrac{1}{4\sigma T_e^3 + hS}$.
AN: on prend $S = 2\pi(R + r_e + e_a + e_p)l$ on a $R_{th2} = 0,03\ K.W^{-1}$.

Q20- Les résistances R_{th1} et R_{th2} sont en série soit $R_{tht} = R_{th1} + R_{th2}$. AN: $R_{tht} = 1,10\ K.W^{-1}$. On en déduit la puissance thermique perdue par le manchot $P_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{R_{tht}} = 50\ W$. En régime stationnaire, la puissance perdue est égale à la puissance reçue liée au métabolisme, on a donc $\mathcal{P}_m = 50\ W$. En accord avec l'énoncé.





Q21- Pour un manchot isolé, la puissance a été une peu sous estimée mais l'ordre de grandeur est bon 50 W au lieu de 85 W.

Les manchots en périphérie du groupe perdent beaucoup de transfert thermique, les manchots au centre perdent peu de transfert thermique, et en moyenne les manchots perdent moins d'énergie en se regroupant car le groupe de N manchots offre une surface de contact avec l'atmosphère plus faible que N fois la surface d'un manchot.

IV. **Correction**

1.

1.a. On a $p(x,t+\tau)=\dfrac{1}{2}p(x-l,t)+\dfrac{1}{2}p(x+l,t)$ (cela traduit que la particule qui se trouve en x à l'instant $t+\tau$ se trouvait soit en $x-l$ à l'instant t soit en $x+l$ à l'instant t avec une probabilité 1/2 pour chaque cas).

1.b. DL à l'ordre 1 en τ de: $p(x,t+\tau)=p(x,t)+\tau\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,t)$

DL à l'ordre 2 en l de: $p(x+l,t)=p(x,t)+l\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$

$p(x-l,t)=p(x,t)-l\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$

On a donc $p(x+l,t)+p(x-l,t)=2p(x,t)+l^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$.

1.c. En remplaçant dans l'équation de probabilité $p(x,t)+\tau\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,t)=p(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$ ou encore $\dfrac{\partial p}{\partial t}=\dfrac{l^2}{2\tau}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$: on trouve une équation de diffusion où $D=\frac{l^2}{2\tau}$.

2.

2.a. On lit $\tau=1\ s$ et $l=1$.

2.b. La fonction position renvoie une liste contenant N+1 termes. La ligne 6 sert à créer la liste avec son premier terme qui est la position initiale de la particule et la boucle for ajoute N termes à la liste.

poslist[i] désigne la position de la particule à l'instant $t_i=i\tau=i$

poslist[i]+random.choice([+l,-l]) désigne la position de la particule à l'instant $t_i+\tau=i+1$, la nouvelle position est obtenue par tirage au sort, on a $x(t_{i+1})=x(t_i)\pm l$.

ligne 6 : poslist=[0] # x(t=0)=0

ligne 10: N=10

Courbe 1: position(10)=[0,-1,0,-1,-2,-1,-2,-1,-2,-3,-4]

Courbe 2: position(10)=[0,1,0,-1,0,1,0,1,0,1,0]

Courbe 3: position(10)=[0,1,2,1,2,1,0,1,2,3,4]

3.

3.a. Le tableau concerne $N_p=3$ particules (3 colonnes) sur l'intervalle de temps $0,4\tau$ (5 lignes $N+1=5$). On lit $x_0(t=3\tau)=T[3,0]=1$ (1ère colonne et 4ième ligne), $x_1(t=2\tau)=T[2,1]=0$ (2ième colonne et 3ième ligne) et $x_2(t=\tau)=T[1,2]=-1$ (3ième colonne et 2ième ligne).

3.b. ligne 20: T[:,i]=position(N) # T[:,i] désigne la colonne j, soit le mouvement de la particule d'indice j à chaque instante, c'est la fonction position(N) qui donne ces valeurs.

3.c. l désigne une liste. La boucle for de la fonction f fait la somme des carrés des termes de la liste et la fonction f renvoie cette somme divisée par le nombre de termes ainsi la fonction f renvoie la valeur moyenne des carrés de l.

3.d. T[i,:] désigne la ligne i du tableau T soit les valeurs des positions des N_p particules à l'instant $t_i=i\tau$. Ainsi f(T[i,:]) désigne la valeur moyenne des carrés des positions des particules à l'instant t_i soit $f(T[i,:])=<x^2(t_i)>$. La liste l1 contient donc les valeurs moyennes des carrés des positions des particules aux instants 0, τ, 2τ... Soit $l1=[<x^2(t=0)>,<x^2(t=\tau)>,<x^2(t=2\tau)>,...,<x^2(t=N\tau)>]$.

D'après la question 1, $D=\dfrac{l}{2\tau}=\dfrac{1}{2}$ avec les valeurs numériques de $l=1$ et $\tau=1\ s$ choisies ici.

La ligne 30 permet de tracer la courbe $<x^2(t)>$ en fonction de t.

La ligne 31 permet de tracer la droite d'équation $y=aDt$ (la pente de la droite est égale à 1, or $D=0.5$ donc $a=2$).

On remarque que plus le nombre de particules est grand et plus la courbe $<x^2(t)>$ se confond avec la droite $y=2Dt$. Les résultats obtenus viennent d'une étude probabiliste or les probabilités sont d'autant plus exactes que les nombres manipulés sont grands. C'est cohérent avec les courbes observées.