Essentiel diffusion thermique

Les grandeurs physiques:

La température T en K.

Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$ en $J.m^{-2}.s^{-1} = W.m^{-2}$.

La loi de Fourier:

$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}T$ où λ est la conductivité thermique d'autant plus petite que le matériau est isolant.

Unité: $[\lambda] = W.m^{-1}.K^{-1}$ (l'unité se retrouve avec la loi de Fourier et le gradient qui est en m^{-1}).

Cette loi traduit que le transfert thermique se fait des fortes vers les faibles températures.

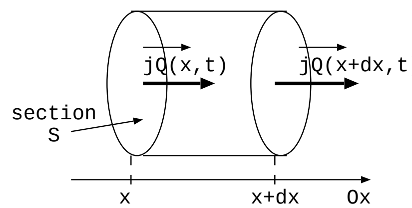
Le système élémentaire en coordonnées cartésiennes:

C'est le système de section S compris entre x et $x + dx$.

La puissance qui entre par diffusion dans le système est $P_e = j_Q(x,t)S$ ou encore l'énergie qui entre dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_e = j_Q(x,t)Sdt$.

La puissance qui sort du système par diffusion est $P_s = j_Q(x + dx, t)S$ ou encore l'énergie qui sort du système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_s = j_Q(x + dx, t)Sdt$.

Rq: $\delta Q_e - \delta Q_s = -\dfrac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}Sdxdt$ avec un DL.



Le système élémentaire en coordonnées cylindriques:

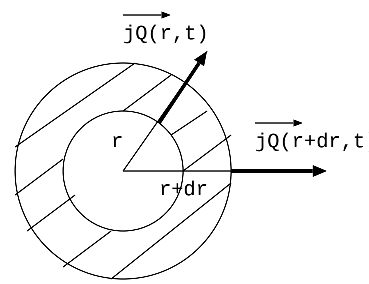
C'est le système compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ et de hauteur h.

La puissance qui entre par diffusion dans le système est $P_e = j_Q(r,t)2\pi rh$ ou encore l'énergie qui entre dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_e = j_Q(r,t)2\pi rhdt$.

La puissance qui sort du système par diffusion est $P_s = j_Q(r + dr, t)2\pi(r + dr)h$ ou encore l'énergie qui sort du système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_s = j_Q(r + dr, t)2\pi(r + dr)hdt$.

Ce système a pour volume $d\tau = 2\pi rhdr$ (surface du petit cylindre fois l'épaisseur dr).

Rq: $\delta Q_e - \delta Q_s = -\dfrac{\partial(j_Q(r,t)r)}{\partial r}2\pi hdrdt$ avec un DL.



Le système élémentaire en coordonnées sphériques:

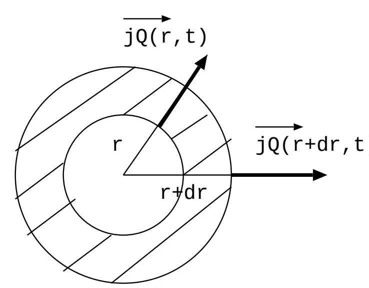
C'est le système compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ et de centre O.

La puissance qui entre par diffusion dans le système est $P_e = j_Q(r,t)4\pi r^2$ ou encore l'énergie qui entre dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_e = j_Q(r,t)4\pi r^2dt$.

La puissance qui sort du système par diffusion est $P_s = j_Q(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2$ ou encore l'énergie qui sort du système entre t et $t + dt$ est $\delta Q_s = j_Q(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2dt$.

Ce système a pour volume $d\tau = 4\pi r^2dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur dr).

Rq: $\delta Q_e - \delta Q_s = -\dfrac{\partial(j_Q(r,t)r^2)}{\partial r}4\pi drdt$ avec un DL.



Ecrire un bilan d'énergie en régime stationnaire:

On définit et on représente le système élémentaire étudié et on écrit: en régime stationnaire la température du système est constante donc la puissance reçue par le système est égale à la puissance perdue: $P_r = P_p$.

A vous d'exprimer les puissances reçues et perdues en fonction des phénomènes présents (diffusion, production d'énergie ...)

Ecrire un bilan d'énergie en régime variable:

On applique le premier principe de la thermodynamique au système élémentaire entre t et $t + dt$ soit: $dU = \delta W + \delta Q$.

avec $\delta W = 0$ pas de travail des forces de pression

avec $\delta Q = +$ le transfert thermique reçu $-$ le transfert thermique perdue.

Le système élémentaire a pour volume $d\tau$, pour masse volumique ρ et pour capacité thermique massique c. La variation d'énergie interne de ce système entre t et $t + dt$ s'écrit:

avec $dU = \rho d\tau c(T(x, t + dt) - T(x, t)) = \rho d\tau c \dfrac{\partial T}{\partial t}(x, t)dt$ en coordonnées cartésiennes

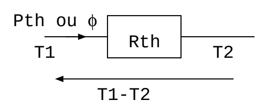
avec $dU = \rho d\tau c(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \dfrac{\partial T}{\partial t}(r, t)dt$ en coordonnées cylindriques ou sphériques

Résistance thermique:

Définition: la résistance thermique est définie par analogie avec la loi d'Ohm $U = V_1 - V_2 = Ri$ où $V_1 - V_2$ est la différence de potentiel qui met les charges en mouvement.

On définit la résistance thermique par $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{th}}$

Unité: $[R_{th}] = K.W^{-1}$



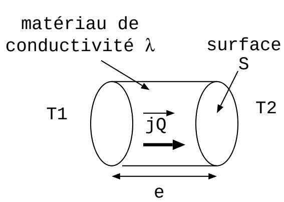
où $\Delta T = T_1 - T_2$ est la différence de température qui crée le transfert thermique et $P_{th} = j_Q S$ est la puissance thermique.

La résistance thermique est d'autant plus grande que le système est isolant donc qu'il laisse peu passer le transfert thermique.

Les résistances thermiques sont en série lorsqu'elles sont traversées par la même puissance thermique.

Les résistances thermiques sont en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même différence de température.

Expression lorsque la diffusion se fait selon une direction fixe Ox, Oy ou Oz:



La résistance thermique s'écrit $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S}$

Méthode pour démontrer cette expression: on prend le système élémentaire compris entre x et $x + dx$: on fait un bilan d'énergie en régime stationnaire, on en déduit que j_Q ne dépend pas de x et que $T(x) = Ax + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = e) = T_2$. On en déduit $P_{th} = j_Q S = \dfrac{(T_1 - T_2)\lambda S}{e} = \dfrac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ d'où $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S}$.

D'autres expressions de la résistance thermique: il faut savoir faire les démonstrations de R_{th} en cylindriques et en sphériques: on écrit la conservation de l'énergie pour le système élémentaire, on montre qu'en régime stationnaire P_{th} est une constante, on écrit $P_{th} = j_Q S$ et on remplace j_Q par son expression avec la loi de Fourier, on sépare les variables T et r et on intègre, on en déduit R_{th} en identifiant avec $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{th}}$.

Equation de diffusion thermique:

On combine l'équation de conservation de l'énergie et la loi de Fourier et on trouve $\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

En régime stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, l'équation de diffusion thermique devient $\Delta T = 0$.

avec en coordonnées cartésiennes: $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

en coordonnées cylindriques ou sphériques, le laplacien est donné.

Rq 1: quand on change t en $-t$ cela revient à changer le sens du temps et l'équation est modifiée, cela veut dire que le phénomène est irréversible.

Rq 2: par une analyse dimensionnelle: $\frac{T}{t} = D\frac{T}{x^2}$ soit $t = \frac{D}{x^2} = \frac{\lambda}{\rho c x^2}$: temps pour que la diffusion se fasse sur la distance x.

Equations à résoudre:

Exemple 1: T vérifie l'équation différentielle de la forme $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$

La solution particulière est constante donc elle vérifie $-\frac{T_p}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$ soit $T_p = T_e$

La solution générale se trouve en écrivant l'équation caractéristique: $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm\frac{1}{\delta}$. On a donc $T_g = Ae^{-x/\delta} + Be^{+x/\delta}$.

La solution est $T(x) = Ae^{-x/\delta} + Be^{+x/\delta} + T_e$. On trouve A et B avec les conditions aux limites.

Exemple 2: T vérifie l'équation $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) = -\frac{p}{D}$.

On multiplie par r: $\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) = -\frac{pr}{D}$.

On intègre une première fois par rapport à r: $r\frac{dT}{dr} = -\frac{pr^2}{2D} + A$.

On divise par r: $\frac{dT}{dr} = -\frac{pr}{2D} + \frac{A}{r}$.

On intègre à nouveau par rapport à r: $T(r) = -\frac{pr^2}{4D} + A\ln r + B$

Au sujet des constantes d'intégration: certaines constantes d'intégration sont nulles car le terme diverge:

Exemple 1: soit $T(r) = \frac{A}{r} + B$ défini pour $r < R$: T diverge pour $r = 0$ donc $A = 0$

Exemple 2: $T(x) = Ae^{x/d} + Be^{-x/d}$ défini pour $x > 0$: $Ae^{x/d}$ diverge pour $x \to \infty$ donc $A = 0$

Exemple 3: $T(x) = Ae^{x/d} + Be^{-x/d}$ défini pour $x < 0$: $Be^{-x/d}$ diverge pour $x \to -\infty$ donc $B = 0$

Remarque: soit $T(r) = \frac{A}{r} + B$ défini pour $R_1 < r < R_2$, aucun terme ne diverge pour r compris entre R_1 et R_2 donc on cherche A et B qui a priori ne sont pas nulles.