Chapitre MF 1 : cinématique des fluides

I. Outils pour décrire un fluide

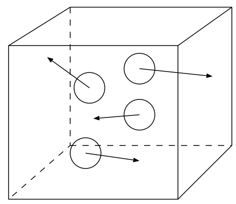
1. Notion de particule fluide

Problèmatique : Un fluide est constitué de particules distantes les unes des autres qui interagissent entre elles. Il est impossible de le décrire en tenant compte du mouvement de chaque molécule, d'une part car le nombre de molécules en interaction est trop important et d'autre part car à l'échelle de la molécule (échelle microscopique) ce milieu est discontinu.

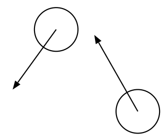
On distingue trois échelles de longueur dans un fluide:

Echelle macroscopique: milieu continu

Echelle mésoscopique



Echelle microscopique: milieu discret



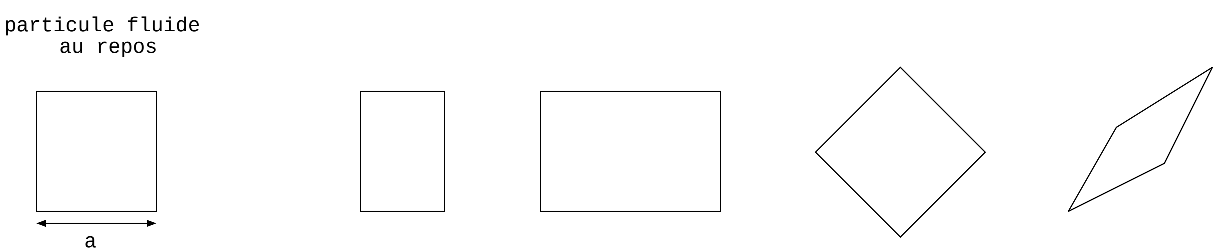
Il est toujours possible de choisir a (taille de la particule fluide) tel que $l << a << L$.

La condition $l << a$ signifie qu'il y a un grand nombre de molécules dans une particule fluide, on peut donc adopter une méthode statistique pour décrire la particule fluide. La vitesse de la particule fluide est égale à la vitesse moyenne de l'ensemble des molécules qui constituent la particule fluide, et la valeur moyenne a du sens lorsqu'on l'effectue sur un grand nombre de molécules. Il en de même pour la pression, la température, la masse volumique...

La condition $a << L$ signifie que d'une particule fluide à l'autre les grandeurs pression, température, masse volumique, ...varient et elles varient de manière **continue.**

Conclusion: On décrit donc le fluide en le décomposant en particule fluide M de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$. Cette description est continue.

Que devient une particule fluide au cours de son mouvement?



2. Approche Eulérienne

L'approche Eulérienne consiste à fixer une position dans l'espace et au cours du temps on observe les variations de la pression, de la température, de la vitesse en ce point. Dans cette approche ce n'est jamais la même particule fluide que l'on observe.

On note $P(M,t)$, $\rho(M,t)$, $\overrightarrow{v}(M,t)$ où M est un point fixé. Lorsque l'on dérive ces grandeurs par rapport au temps, M est fixé, on fait des dérivées partielles. On note:

3. Approche Lagrangienne

L'approche Lagrangienne consiste à suivre une particule fluide au cours de son mouvement. On note $P(M,t)$, $\rho(M,t)$, $\overrightarrow{v}(M,t)$ où M est la particule fluide que l'on suit au cours du temps.

Exemple: un parachutiste fait un saut en amenant avec lui un thermomètre: on étudie l'écoulement de l'air autour du parachutiste. Que lit-on sur le thermomètre au cours de la chute?

Dérivée particulaire du champ scalaire $T = T(x, y, z, t)$:

On généralise:

Dérivée particulaire d'un champ de vitesse : cas de l'accélération:

Méthode pour calculer l'accélération: on calcule $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$, puis on calcule $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ sans changer l'ordre des termes.

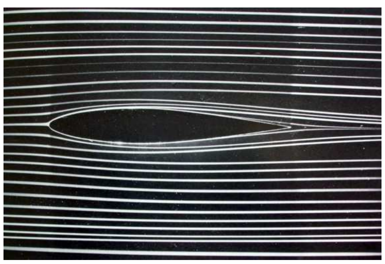
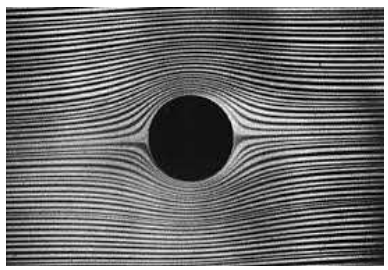
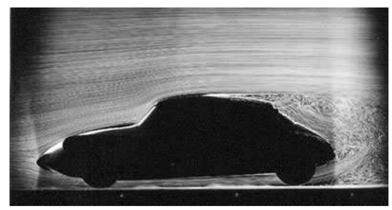
Exemples de calcul d'accélération : $\overrightarrow{v} = ky^2\overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{v} = ky^2\overrightarrow{e_y}$

4. Lignes de courant

Définition: une ligne de courant est, à un instant donné, une ligne tangente au vecteur vitesse en tout point. Les lignes de courant sont orientées dans le sens du vecteur vitesse.

.

.

En régime permanent

Equation de la ligne de courant passant par le point $M_0(x_0, y_0)$:

Soit $M(x, y)$ un point de la ligne de courant

Le vecteur vitesse en M est

Le vecteur tangent à la trajectoire en M est

Exemple: $\overrightarrow{v} = ky\overrightarrow{e_x} + Kx\overrightarrow{e_y}$.

II. **Utilisation du vecteur vitesse pour caractériser un écoulement**

Un écoulement est stationnaire

Comment le reconnaît-on?

$\overrightarrow{v} = v_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{v} = kx\overrightarrow{e_y}$

Un écoulement est dit incompressible

Comment le reconnaît-on?

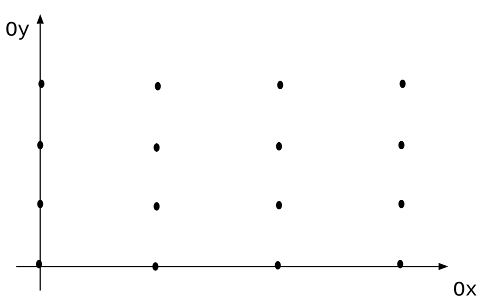
Un écoulement est irrotationnel

Comment le reconnaît-on?

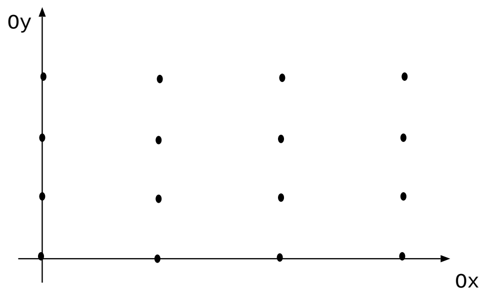
A l'inverse, s'il existe au moins un point de l'espace où $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v}$ est non nul, l'écoulement est dit rotationnel et on le caractérise par son vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v}$.

Pour les écoulements imaginaires suivants, on demande de représenter le vecteur vitesse en différents points du fluide et d'en déduire (sans équation) l'allure des lignes de courant, de calculer l'accélération particulaire et de préciser si l'écoulement est compressible, incompressible, rotationnel ou irrotationnel.

Exemple 1: $\overrightarrow{v} = kx\overrightarrow{e_x}$ avec $k > 0$



Exemple 2: $\overrightarrow{v} = ky\overrightarrow{e_x}$ avec $k > 0$

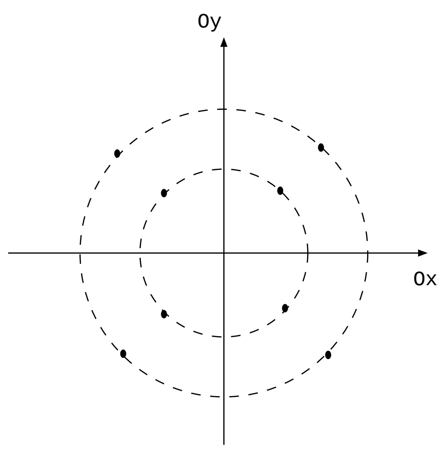


On donne en coordonnées cylindriques:

La divergence: $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

le rotationnel: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = (\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$.

Exemple 3: $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_r}$.



III. **Conservation de la masse**

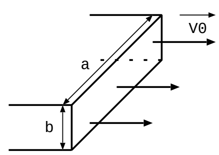
1. Notion de débit volumique

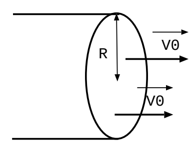
Définition :

Expression : $D_v = \iint \overrightarrow{v}(M).dS\overrightarrow{n}(M)$: le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers la section traversée par le fluide.

On retient:

Cas particulier d'un écoulement uniforme : $D_v = v.S$





Exercice 1: soit un écoulement de la forme $\overrightarrow{v} = kx\overrightarrow{e_y}$. On considère une section S dans le plan Oxz comprise entre $x = 0$ et $x = a$, et entre $z = 0$ et $z = b$. Calculer le débit volumique de cet écoulement à travers la section S.

Exercice 2 : soit un écoulement de la forme $\overrightarrow{v} = v_0(1 - \frac{r}{R})\overrightarrow{e_z}$ en coordonnées cylindriques. Calculer le débit volumique à travers un disque de rayon R perpendiculaire à l'écoulement.

.

2. Notion de débit massique

Définition :

Expression : $D_m = \iint \rho(M)\overrightarrow{v}(M).dS\overrightarrow{n}(M)$: soit le débit massique est le flux du vecteur $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$ à travers la section traversée par le fluide.

On retient:

Cas particulier d'un écoulement uniforme et incompressible : $D_m = \rho.v.S$

Analogie avec la diffusion:

Diffusion de particules

Diffusion thermique

Mécaniques des fluides

Exemple 1 : soit une canalisation à section circulaire de rayon $R = 5\ cm$ dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse $V = 1\ m/s$. Calculer la masse d'eau qui traverse une section de cette canalisation pendant 10 minutes.

Exemple 2 : soit une canalisation circulaire de diamètre $d_1 = 20\ cm$ dans lequel s'écoule un liquide de vitesse $V_1 = 1\ m/s$. Le diamètre de la canalisation est divisé par 2 tout en conservant le même débit volumique, calculer la vitesse V_2.

Exemple 3 : remplir un seau de 5 litres d'eau prend une minute au robinet de la cuisine. Estimer la vitesse de l'eau au niveau du robinet.

3. Equation locale de conservation de la masse

Soit un écoulement de fluide dans un tuyau de section S à la vitesse $\overrightarrow{v} = v(x,t)\overrightarrow{e_x}$. On note $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide. Ecrire l'équation de conservation de la masse.

Signification physique :

IV. Différents modèles d'écoulement

1. Ecoulement incompressible

Définition:

Attention : Il est important de distinguer la notion de fluide incompressible et d'écoulement incompressible.

Les liquides sont des fluides ...., ils sont donc en écoulement incompressible.

Les gaz sont des fluides .... On admet qu'ils sont en écoulement incompressible dans le cas où la vitesse des particules fluide est inférieure à la vitesse du son dans le gaz concerné. Dans ce cas, le fluide est compressible en écoulement incompressible.

Exemples : une voiture se déplaçant dans l'air à 100 km/h

un avion se déplaçant à une vitesse de 1000 km/h.

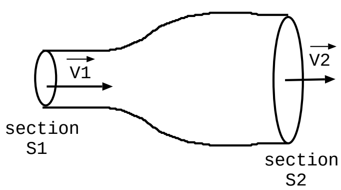
Conséquence 1 : Equation locale caractéristique d'un écoulement incompressible.

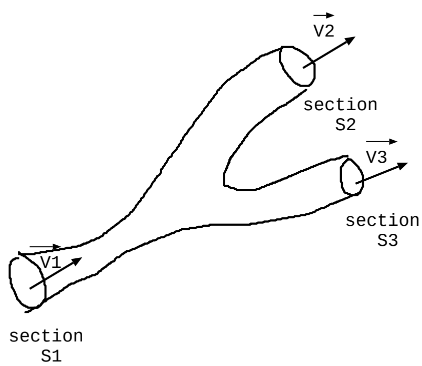
Donnée: $\text{div}(\rho\overrightarrow{v}) = \rho\text{div}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho$.

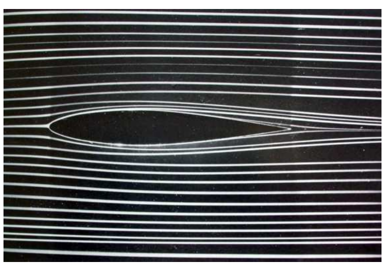
Conséquence 2 : Equation intégrale caractéristique d'un écoulement incompressible: le débit volumique se conserve (soit le débit volumique entrant est égal au débit volumique sortant).

On applique le théorème d'Ostrogradsky:

Exemples:







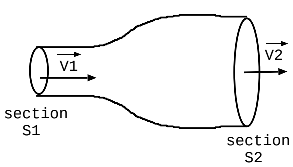
2. Ecoulement stationnaire

Définition :

Conséquence 1 : équation locale caractéristique d'un écoulement stationnaire:

Conséquence 2 : équation intégrale caractéristique d'un écoulement stationnaire: le débit massique se conserve (soit le débit massique entrant est égal au débit massique sortant).

On applique le théorème d'Ostrogradsky:



3. Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

Définition :

4. Ecoulement irrotationnel

Définition :

Conséquence : on rappelle la propriété mathématique sur les opérateurs, pour tout champ scalaire V on a: $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = \overrightarrow{0}$.

Donc

Cas particulier d'un écoulement incompressible et irrotationnel: le champ des vitesses vérifient les équations:

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

divergence : $div \overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

laplacien scalaire : $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Exemple 1 : soit un écoulement de champ de vitesses $\overrightarrow{V} = \frac{A}{r}\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques. Vérifier qu'il est irrotationnel et incompressible et exprimer ϕ le potentiel des vitesses associé.

Exemple 2 : pour un écoulement irrotationnel et incompressible, on définit le potentiel des vitesses $\phi(r,\theta) = r^2 f(\theta)$ en coordonnées cylindriques. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$ et la résoudre. En déduire le champ des vitesses.

V. **Théorème d'Ostrogradsky**

Le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue à tout le volume intérieur à la surface fermée.