Essentiel de cinématique des fluides

I. Le vocabulaire

Dans l'**approche Eulérienne**, on étudie en un point donné, l'évolution des caractéristiques du fluide (température, pression, masse volumique, vitesse,...) au cours du temps. Dans cette approche, les variations au cours du temps sont étudiées par les dérivées locales notées $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Dans l'**approche Lagrangienne**, on étudie l'évolution des caractéristiques d'une particule fluide (température, pression, masse volumique, vitesse,...) au cours du temps en la suivant dans son mouvement. Dans cette approche, les variations au cours du temps sont étudiées par les dérivées particulaires notées $\dfrac{d}{dt}$ ou $\dfrac{D}{Dt}$.

La **dérivée particulaire de la masse volumique** s'écrit: $\dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho$.

La **dérivée particulaire de la vitesse** désigne l'accélération de la particule fluide au cours de son mouvement: $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$.

Le terme $\dfrac{\partial}{\partial t}(...)$ désigne la dérivée locale (au point M fixé), ce terme est nul en régime stationnaire.

Le terme $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})(....)$ désigne la dérivée convective liée au mouvement du fluide.

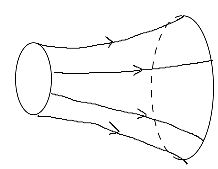
remarque: l'accélération convective se calcule en deux temps:

-on calcule $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$

-puis sans changer l'ordre des termes on calcule $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$.

Ligne de courant: c'est une ligne orientée tangente au vecteur vitesse en tout point. En régime stationnaire, les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires.

Un tube de courant est un volume dont la surface latérale est composée de lignes de courant, c'est une sorte de canalisation fictive dont les particules fluides rentrent par un côté et ressortent par l'autre sans sortir par la surface latérale.



Débit volumique (en m^3/s) : $D_v = \displaystyle\iint v(M)dS(M)$ où M est un point de la surface perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$, traversée par le fluide. On trouve l'expression de $dS(M)$ en cherchant les deux variables qui permettent de repérer M. Exemples: $M(x,y)$ donne $dS = dxdy$, $M(r,\theta)$ donne $dS = dr.rd\theta$ (attention de ne pas oublier r).

Pour un écoulement uniforme $D_v = v.S$.

Utilité: on déduit du débit volumique le volume V de fluide qui traverse une section S pendant la durée Δt soit $V = D_v \Delta t$.

Débit massique (en kg/s): $D_m = \displaystyle\iint \rho(M)v(M)dS(M)$ où M est un point de la surface perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$, traversée par le fluide. On trouve l'expression de $dS(M)$ en cherchant les deux variables qui permettent de repérer M.

Pour un écoulement uniforme et incompressible : $D_m = \rho S v = \rho D_v$.

Utilité: on déduit du débit massique la masse m de fluide qui traverse une section S pendant la durée Δt soit $m = D_m \Delta t$.

L'équation de conservation de la masse s'écrit $\text{div}(\overrightarrow{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ avec $\overrightarrow{j} = \rho \overrightarrow{v}$ est le vecteur densité de courant exprimé en $kg.m^{-2}.s^{-1}$. Soit $j(x,t)Sdt$ est la masse de fluide qui traverse la section S placée en x entre t et $t + dt$.

II. **Les modèles d'écoulement**

Ecoulement	Définition et caractérisation mathématique	Conséquence
Stationnaire	En un point fixé de l'espace, les champs scalaires et vectoriels ne varient pas au cours du temps soit $\frac{\partial}{\partial t} = 0$	Le débit massique est conservé
Incompressible	les particules fluides conservent leur masse volumique au cours de leur mouvement soit $\frac{d\rho}{dt} = 0$	$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0$ et le débit volumique est conservé
Irrotationnel	les particules fluide ne tournent pas sur elles-mêmes soit le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$ est nul en tout point	il existe une fonction appelée potentiel des vitesses notée ϕ et définie par $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$

Cas particulier de l'écoulement incompressible irrotationnel: on a $\mathrm{div}\overrightarrow{v} = 0$ (incompressible) et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$ (irrotationnel) d'où le potentiel des vitesses ϕ vérifie l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$.

En coordonnées cartésiennes:

$\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

$\mathrm{div}\overrightarrow{v} = \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{z}}$ où v_x, v_y et v_z sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ définies pas $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$.

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{v} = (\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z})\Lambda\overrightarrow{v}$

$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial z^2}$