TD cinématique des fluides

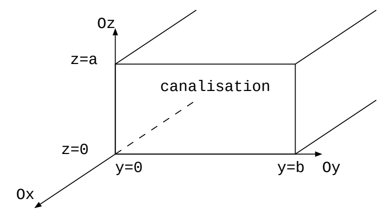
On donne en coordonnées cylindriques:

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

divergence: $\text{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

rotationnel: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

I. **Ecoulement de Couette plan**



On étudie l'écoulement d'un fluide dans une canalisation comprise entre les plans $z = 0$ et $z = a$ et les plans $y = 0$ et $y = b$. Le champ de vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \frac{v_0 z}{a}\overrightarrow{e_x}$.

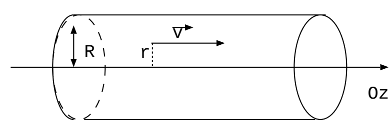
1. L'écoulement est-il stationnaire ? incompressible? irrotationnel?

2. Calculer l'accélération d'une particule fluide. Décrire le mouvement de la particule fluide.

3. Calculer le débit volumique à travers une section de la canalisation. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

Réponses : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *et* $D_v = \frac{v_0 ab}{2}$

II. **Ecoulement de Poiseuille**



On considère l'écoulement décrit par le champ des vitesses : $\overrightarrow{v} = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})\overrightarrow{e_z}$ en coordonnées cylindriques avec $r < R$. Cet écoulement, dit de Poiseuille, correspond à celui d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique d'axe Oz et de rayon R.

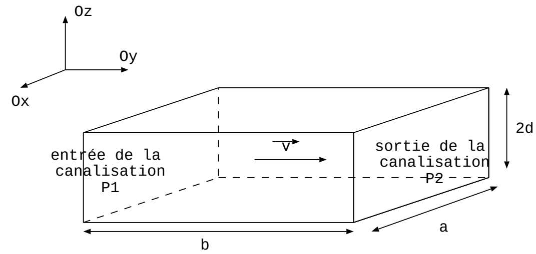
1. Représenter le vecteur vitesse en différents points de la canalisation. L'écoulement est-il stationnaire ? incompressible ? rotationnel ?

2. Déterminer le champ des accélérations. Conclure sur le mouvement d'une particule fluide.

3. Calculer le débit volumique à travers une section de rayon R. En déduire la vitesse moyenne.

Réponses : $\overrightarrow{\Omega} = \frac{v_0 r}{R^2}\overrightarrow{e_\theta}$ *et* $D_v = \frac{v_0 \pi R^2}{2}$

III. **Notion de résistance hydraulique**



Soit un écoulement fluide de vitesse:
$\overrightarrow{v} = \dfrac{(P_1 - P_2)}{K}(d^2 - z^2)\overrightarrow{e_y}$ dans une canalisation de section rectangulaire entre les plans $z = -d$ et $z = +d$, et les plans $x = 0$ et $x = a$. P_1 est la pression en $y = 0$ à l'entrée de la canalisation et P_2 est la pression en $y = b$ à la sortie de la canalisation. K est une constante.

1. On donne $P_1 > P_2$. Justifier par un argument physique le signe de la constante K.

2. Exprimer l'accélération particulaire. L'écoulement est-il incompressible? irrotationnel? Conclure sur le mouvement d'une particule fluide.

3. Exprimer D_v, le débit volumique du fluide à travers la canalisation. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

4. On définit la résistance hydraulique par $R_H = \dfrac{P_1 - P_2}{D_v}$. Justifier cette définition par une analogie électrique et en déduire l'expression de R_H.

Réponses: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *et* $D_v = \dfrac{4ad^3(P_1 - P_2)}{3K}$

IV. **Champ des vitesses dans une tornade**

On s'intéresse à une tornade, vent tournant (et malheureusement dévastateur) à grande vitesse (pouvant atteindre 500 km/h). Le système est à symétrie cylindrique, d'axe Oz, axe de la tornade. L'écoulement est supposé incompressible. Le champ de vitesse est décrit par $\overrightarrow{v} = v_\theta(r,\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ et un vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}$ connu.

1. Représenter les lignes de courant (vue de dessus, avec Oz qui vient vers nous).

2. Un gaz est compressible, cependant un gaz peut être en écoulement incompressible lorsque la vitesse de l'écoulement est inférieure à la vitesse du son ($c = 340\ m.s^{-1}$). Vérifier que l'écoulement de l'air dans une tornade est incompressible. En déduire que $v(r,\theta)$ ne peut pas dépendre de θ et exprimer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$ à l'aide du formulaire.

3. Dans la tornade, pour $r < a$ le vecteur tourbillon s'écrit : $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_0\overrightarrow{e_z}$. En déduire l'expression de la vitesse de l'écoulement pour $r < a$.

4. A l'extérieur de la tornade, pour $r > a$, le vecteur tourbillon s'écrit : $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$. En déduire l'expression de la vitesse de l'écoulement pour $r > a$ (penser à utiliser la continuité de la vitesse pour trouver la constante d'intégration).

5. Tracer la fonction $v(r)$. Exprimer le débit volumique d'air à travers un rectangle compris entre $z = 0$ et $z = h$ et $r = 0$ et $r = a$. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

Réponses : $v_\theta(r) = \Omega_0 r$ *pour* $r < a$ *et* $v_\theta(r) = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}$ *pour* $r > a$, $D_v = \dfrac{\Omega_0 a^2 h}{2}$