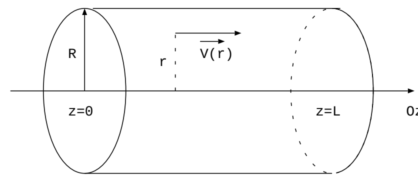
TD dynamique des fluides

I. **Ecoulement de Poiseuille**

En 1835 un médecin français, Poiseuille fit une série d'expériences pour déterminer comment un fluide visqueux s'écoule dans un tuyau droit. Son but était de comprendre la dynamique de la circulation sanguine chez l'homme sachant que le plasma sanguin se comporte comme un fluide newtonien. Le sang s'écoule dans le corps humain sous l'action du coeur (pompe) et d'un gradient de pression (pression de l'ordre de 27 hPa aux pieds et pression de l'ordre de 8 hPa à la tête).

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique de rayon R, parallèlement à l'axe Oz du tube, la vitesse est de la forme $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_z}$. L'écoulement est du à un gradient de pression ente les deux extrémités du tube distantes de L, la pression est de la forme $P(z) = P_0 - Kz$ avec K constante positive. On néglige les forces de pesanteur.



1. Montrer que l'accélération d'une particule fluide est nulle. On donne $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes et en déduire que $\Delta v(r) = -\dfrac{K}{\eta}$.

3. On donne $\Delta v(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})$. Rappeler les conditions aux limites pour le fluide visqueux étudié. Déterminer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(r)$ en fonction de K, r, R et η.

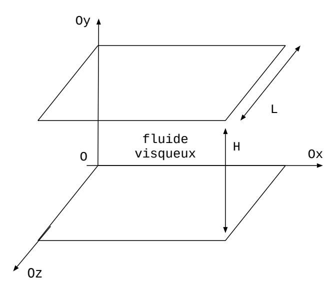
4. Représenter le profil des vitesses sur une section perpendiculaire à l'écoulement et calculer le débit volumique à travers une section du tube. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

5. Déterminer qualitativement le sens de la force exercée par le fluide sur le tube.

Réponses: $v(r) = \dfrac{K}{4\eta}(R^2 - r^2)$, $D_v = \dfrac{KR^4\pi}{8\eta}$.

II. **Ecoulement de Couette**

On considère l'écoulement unidimensionnel permanent d'un liquide de masse volumique ρ et de viscosité η entre deux plans parallèles de surface S très grande et distants de H. Le fluide sera supposé soumis aux seules forces de pression et viscosité. L'écoulement, appelé écoulement de Couette, est de la forme $\overrightarrow{v} = v(x,y)\overrightarrow{e_x}$. On suppose la pression au sein du fluide uniforme et égale à P_0. L'écoulement est du au déplacement du plan supérieur à la vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_x}$, le plan inférieur restant fixe.



1. L' écoulement est incompressible, en déduire une information sur la vitesse.

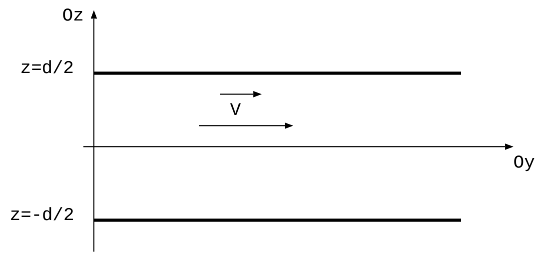
2. Déduire de l'équation de Navier-stokes et des conditions aux limites l'expression de $v(y)$.

3. Représenter le profil des vitesses sur une section perpendiculaire à l'écoulement et calculer le débit volumique à travers cette section de hauteur H et de largeur L. En déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.

Réponses : 1- v ne dépend pas de x 2- $\overrightarrow{v} = \dfrac{v_0 y}{H}\overrightarrow{e_x}$ *3-* $D_v = \dfrac{v_0 H L^2}{2}$

III. **Ecoulement de Poiseuille entre deux plans**

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux de masse volumique ρ et de viscosité η entre deux plans horizontaux de côtes $z = -d/2$ et $z = +d/2$. On néglige le poids. On étudie un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_y}$ et un champ de pression $P = P(x, y, z)$.



1. Vérifier que le champ de vitesses proposé est compatible avec l'hypothèse d'écoulement incompressible.

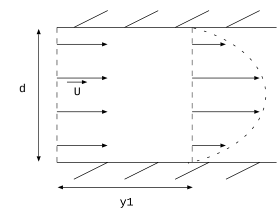
2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes et la projeter sur Ox, Oy et Oz.

3. On rappelle que lorsque deux fonctions $f(y)$ et $g(z)$ sont égales alors ces deux fonctions sont constantes. On note $\frac{dP}{dy} = -\frac{\Delta P}{L} < 0$. Montrer que la vitesse de l'écoulement s'écrit $v(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L}(\frac{d^2}{4} - z^2)$.

4. Exprimer le débit volumique à travers une section de largeur h selon Ox et de hauteur d selon Oz. En déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.

5. A partir d'une analogie électrique, définir la notion de résistance hydraulique en fonction de ΔP et D_v. Donner ici son expression en fonction de L, h, d et η.

6. *Question moins classique, suivez le guide* : On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif. Le fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\overrightarrow{U} = U\overrightarrow{e_y}$ pénètre entre les deux plaques distantes de d.

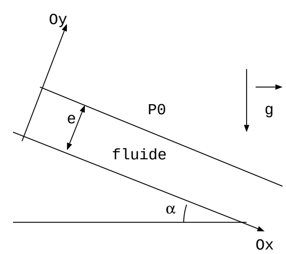


6.a. Dans la zone de longueur y_1 selon Oy, le régime d'écoulement n'est pas stationnaire, la vitesse est de la forme $\overrightarrow{v} = v_y(z,t)\overrightarrow{e_y}$. En négligeant les variations de pression dans cette zone, montrer que v_y vérifie une équation de type équation de diffusion. En déduire un ordre de grandeur de la durée de diffusion τ du vecteur vitesse sur une distance L.

6.b. En écrivant que τ est aussi le temps que met le fluide pour parcourir la zone de longueur y_1, en déduire l'expression de y_1 en fonction de U, L, η et ρ.

IV. **Ecoulement sur un plan incliné**

Un liquide de viscosité η, de masse volumique ρ s'écoule sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale sur une hauteur e. L'écoulement est permanent et incompressible. La vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = v(x,y)\overrightarrow{e_x}$ et la pression ne dépend que de y, on la note $P(y)$.



1. Que peut-on déduire de l'hypothèse d'un écoulement incompressible sur l'expression de la vitesse?

2. Projeter sur Ox et Oy l'équation de Navier-Stokes.

3. L'atmosphère impose la pression P_0 uniforme à l'interface avec le fluide. Montrer que $P(y) = P_0 - \rho g \cos\alpha(y - e)$.

4. En déduire $V(y)$ en fonction de deux constantes d'intégration. Que vaut $V(y = 0)$? justifier votre réponse. On a $\frac{dv}{dy}(y = e) = 0$ par continuité de la force de viscosité en $y = e$. En déduire les deux constantes d'intégration.

5. Calculer le débit volumique à travers une section de largeur L selon Oz.

Réponses: 4- $v(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}(2ey - y^2)$ *5-* $D_v = \frac{g \sin\alpha e^3 L}{3\nu}$