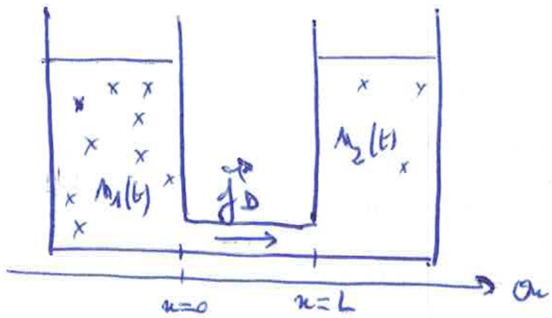
Transfert de soluté



Les molécules A diffusent des fortes vers les faibles concentrations soit de S_1 vers S_2 selon $(+Ox)$.
On se place en régime quasi-stationnaire, cela suppose que durant le temps de trajet des molécules A dans le tube, les concentrations $n_1(t)$ et $n_2(t)$ n'ont pas le temps de varier.

1) L'équation de diffusion s'écrit : $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$

---

2) En régime quasi-permanent $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\dfrac{d^2 n}{dx^2} = 0$

en intégrant deux fois par rapport à x il vient :

$$\frac{dn}{dx} = A \qquad n(x) = Ax + B$$

avec les conditions aux limites : $n(x=0) = n_1 = B$

$n(x=L) = n_2 = AL + B \Rightarrow A = \dfrac{n_2 - n_1}{L}$

$$\text{d'où } n(x) = \frac{n_2 - n_1}{L} x + n_1$$

qui s'écrit ici : $\boxed{n(x,t) = \dfrac{n_2(t) - n_1(t)}{L} x + n_1(t)}$

Le nombre de molécules A qui traversent la section S du tube en $x=0$ est : $j_D(x=0)\, S\, dt$.
Le nombre de molécules A qui traversent la section S du tube en $x=L$ est : $j_D(x=L)\, S\, dt$.
On trouve $\vec{j}_D$ avec la loi de Fick : $\vec{j}_D = -D\, \overrightarrow{\text{grad}}\, n = -D \dfrac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x$

soit $\boxed{j_D = -D \dfrac{n_2(t) - n_1(t)}{L}}$ indépendant de x

Donc $\delta N = j_D\, S\, dt = \dfrac{DS}{L}\left(n_1(t) - n_2(t)\right) dt$: est le nombre de particules qui entrent et qui sortent du tube entre t et $t+dt$.

3) Bilan de matière au récipient S_1 entre t et $t+dt$:

Nbre de molécules A dans S_1 à t : $N_A(t) = n_1(t)\,V$

à $t+dt$: $N_A(t+dt) = n_1(t+dt)\,V$

Nbre de molécules A qui quittent S_1 entre t et $t+dt$:

$$\delta N_{perdu} = \frac{DS}{L}\left(n_1(t) - n_2(t)\right) dt$$

d'où $$N_A(t+dt) = N_A(t) - \delta N_{perdu}$$

$$n_1(t+dt)\,V = n_1(t)\,V - \frac{DS}{L}\left(n_1(t) - n_2(t)\right) dt$$

soit $$\underbrace{\left[n_1(t+dt) - n_1(t)\right]}_{\frac{dn_1}{dt}\times dt} V = -\frac{DS}{L}\left(n_1(t) - n_2(t)\right) \cancel{dt}$$

d'où $$\boxed{\frac{dn_1}{dt} = -\frac{DS}{L}\left(n_1 - n_2\right)} < 0 \qquad n_1(t) \downarrow$$

---

4) Le nombre total de molécules A réparties dans S_1 et S_2 est constant

donc $$\boxed{n_1(t) + n_2(t) = n_1(0) + n_2(0) = n_0}$$

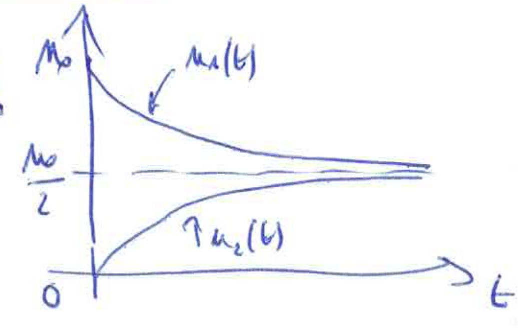
On a donc à résoudre :
$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = -\dfrac{DS}{L}(n_1 - n_2) = -\dfrac{DS}{L}\left(n_1 - (n_0 - n_1)\right) \\ n_1 + n_2 = n_0 \end{cases}$$

soit $$\frac{dn_1}{dt} + \frac{2DS}{L} n_1 = \frac{DS}{L} n_0 \qquad \text{on pose } \boxed{\tau = \frac{L}{2DS}}$$

solution : $$n_1 = \underbrace{\frac{n_0}{2}}_{\text{solution particulière}} + A\,e^{-t/\tau} \qquad n_1(t=0) = n_0 = \frac{n_0}{2} + A \Rightarrow A = \frac{n_0}{2}$$

d'où $$\boxed{n_1(t) = \frac{n_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right)}$$

et $$\boxed{n_2(t) = n_0 - n_1(t) = \frac{n_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



La diffusion cesse lorsque les solutions sont de même concentration : $n_1 = n_2 = \frac{n_0}{2}$

5) L'équation de diffusion : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ donne par analyse dimensionnelle : $\frac{n}{\tau_{diff}} = D \frac{n}{L^2}$ soit $\boxed{\tau_{diff} = \frac{L^2}{D}}$ temps de diffusion dans le tube de longueur L

$n_1(t)$ et $n_2(t)$ varient sur un temps d'ordre de grandeur $\boxed{\tau = \frac{L}{2DS}}$

Pour un régime quasi-stationnaire, il faut que $n_1(t)$ et $n_2(t)$ varient peu le temps que les particules diffusent dans le tube soit :

$$\tau_{diff} \ll \tau$$

<u>AN</u> : $\tau_{diff} = \frac{(5.10^{-3})^2}{1,5.10^{-9}} \simeq 10^4 s$

$\tau = \frac{L}{2DS} = \frac{5.10^{-3}}{2 \times 1,5.10^{-9} \times 10^{-3}} \simeq 10^9 s \gg \tau_{diff}$

L'hypothèse du régime quasi-stationnaire est validée