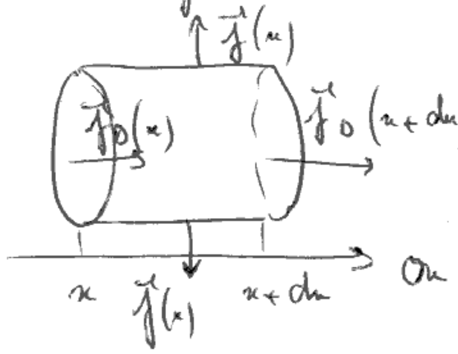
IX) Diffusion par une paroi poreuse

1) Soit le système élémentaire compris entre x et $x+dx$:



En régime stationnaire, le nbre de particules dans le système est constant donc le nbre de particules reçues est égal au nbre de particules perdues : $\delta N_{reçu} = \delta N_{perdu}$

avec $\delta N_{reçu} = j_D(x) S\, dt$ (particules qui entrent entre t et $t+dt$) avec $\boxed{S = \pi a^2}$

$$\delta N_{perdu} = \underbrace{j_D(x+dx) S\, dt}_{\text{particules qui sortent par diffusion}} + \underbrace{j(x)\, 2\pi a\, dx\, dt}_{\text{particules qui sortent par la paroi latérale}}$$

d'où $j_D(x) S\, \cancel{dt} = j_D(x+dx) S\, \cancel{dt} + j(x)\, 2\pi a\, dx\, \cancel{dt}$

$$0 = \underbrace{\left[j_D(x+dx) - j_D(x)\right]}_{\frac{dj_D}{dx} \times \cancel{dx}} \pi a^{\cancel{2}} + j(x)\, 2\cancel{\pi} \cancel{a}\, \cancel{dx}$$

soit $\boxed{\dfrac{dj_D}{dx} = -j(x)\dfrac{2}{a} = -\dfrac{2K}{a}\left(n(x) - n_{ext}\right)}$

2) Loi de Fick : $\vec{j}_D = -D\, \overrightarrow{\text{grad}}\, n = -D \dfrac{dn}{dx} \vec{e}_x$ soit $j_D = -D \dfrac{dn}{dx}$

d'où $-D \dfrac{d^2 n}{dx^2} = -\dfrac{2K}{a}\left(n(x) - n_{ext}\right)$

soit $\boxed{\dfrac{d^2 n}{dx^2} - \dfrac{2K}{aD} n(x) = -\dfrac{2K}{aD} n_{ext}}$ par identification avec $\dfrac{1}{\delta} = \sqrt{\dfrac{2K}{aD}}$

3) Solution particulière : $n_p = n_{ext}$

Solution générale : Ég. caractéristique : $r^2 - \dfrac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm \dfrac{1}{\delta}$

$$n_g = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$$

d'où $n(x) = n_{ext} + A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$

Conditions aux limites : $n(x=0) = n_0 = n_{ext} + A + B$

$$n(L \to \infty) = n_{ext} = n_{ext} + \underbrace{A e^{L/\delta}}_{\text{ce terme diverge}} + \underbrace{\cancel{B e^{-L/\delta}}}_{=0}$$

donc on doit prendre $A = 0$

d'où $\boxed{A = 0}$ et $\boxed{B = n_0 - n_{ext}}$ et $\boxed{n(x) = n_{ext} + (n_0 - n_{ext}) e^{-x/\delta}}$ 2/2

4) Le nbre de particules qui s'échappent par la surface latérale entre x et $x + dx$ est :

$$\delta N = j(x)\, 2\pi a\, dx\, \Delta t$$

d'où le nbre de particules qui s'échappent par toute la surface : $N = \int_{x=0}^{x=L} j(x)\, 2\pi a\, dx\, \Delta t$

$$= \int_0^L 2\pi a K \left(n(x) - n_{ext} \right) dx\, \Delta t$$

$$= 2\pi a K (n_0 - n_{ext}) \int_0^L e^{-x/\delta}\, dx\, \Delta t$$

$$= 2\pi a K (n_0 - n_{ext}) \underbrace{\left[e^{-x/\delta} \times (-\delta) \right]_0^L}_{-\delta \left(\underbrace{e^{-L/\delta}}_{\substack{= \\ 0}} - 1 \right)}$$

car $L \to \infty$

$$\boxed{N = 2\pi a K \delta (n_0 - n_{ext})}$$