

Correction DM 4

I. Diffusion à travers une cellule: ordres de grandeur

L'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ soit en analyse dimensionnelle $\frac{n}{\tau} = D\frac{n}{L^2}$ et $\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{(20 \cdot 10^{-6})^2}{7,0 \cdot 10^{-11}} = 6 \text{ s}$: la diffusion des molécules dans la cellule est donc très rapide.

II. Mesure de D

1. La loi de Fick en vecteur s'écrit $\vec{j}_D = -D\vec{\text{grad}}n = -D\frac{dn}{dz}\vec{e}_z$ et en scalaire $j_D = -D\frac{dn}{dz}$. Elle traduit le fait que la diffusion se produit des fortes concentrations vers les faibles concentrations.

Ici la densité de molécules d'eau dans l'air est nulle en haut du tube puisque le courant d'air chasse les molécules et la densité de molécules d'eau dans l'air est grande en bas du tube puisqu'il y a de l'eau qui s'évapore. Donc les molécules d'eau diffusent des fortes vers les faibles densités soit du bas vers le haut du tube. Le courant d'air permet de maintenir une pression nulle en haut du tube, le récipient d'eau permet de maintenir le phénomène d'évaporation donc on est en régime stationnaire.

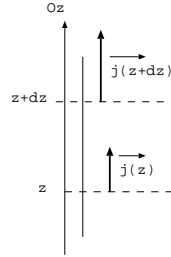
2. La loi des GP s'écrit $PV = n^*RT$ où n^* désigne le nombre de moles. Attention : dans le cours n est la densité particulaire, ici on note n^* le nombre de moles pour ne pas la confondre. Par définition $n^* = \frac{N}{V}$ où N est le nombre de particules.

On a $N = n^*\mathcal{N}_a = \frac{PV\mathcal{N}_a}{RT}$ soit $n(z=0) = \frac{N}{V} = \frac{P\mathcal{N}_a}{RT}$. d'où $n(z=0) = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}$.

3. On considère le système infinitésimal de section S compris entre z et $z + dz$.

Le nombre de molécules d'eau qui entrent dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta N_e = j(z)Sdt$.

Le nombre de molécules d'eau qui sortent du système entre t et $t + dt$ est $\delta N_s = j(z + dz)Sdt$.



En régime stationnaire, le nombre de molécules dans le système est constant donc le nombre de molécules qui entrent est égal au nombre de molécules qui sortent soit $j(z) = j(z + dz)$ donc j est une constante.

Or d'après la loi de Fick $j = -D\frac{dn}{dz}$ est une constante donc $n(z) = Az + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites $n(z=0) = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT} = B$ et $n(z=h) = 0 = Ah + B$. On en déduit $n(z) = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}(1 - \frac{z}{h})$.

4. La loi de Fick $j = -D\frac{dn}{dz} = \frac{P_s\mathcal{N}_a D}{RT h} > 0$: la diffusion se fait bien de l'eau vers l'air car elle se fait des fortes concentrations en eau vers les faibles concentrations en eau.

Le nombre de molécules d'eau qui s'évaporent entre t et $t + dt$ est égal au nombre de molécules d'eau vapeur qui traversent la section S en $z = 0$ on a donc $\delta N_v = j(z=0)Sdt = \frac{P_s\mathcal{N}_a DS}{RT h} dt$.

5. La masse d'une molécule d'eau est $\frac{M(H_2O)}{\mathcal{N}_a}$ donc la masse d'eau qui s'évapore entre t et $t + dt$ est $\delta m_v = \delta N_v \frac{M(H_2O)}{\mathcal{N}_a}$.

On écrit la conservation de la masse du système total (récipient+eau): $m(t + dt) - m(t) = -\delta m_v < 0$ (la masse totale du système diminue) soit pour dt petit on a $dt \frac{dm}{dt} = -\frac{M(H_2O)}{\mathcal{N}_a} \frac{P_s\mathcal{N}_a DS}{RT h} dt$ soit $\frac{dm}{dt} = -\frac{P_s\mathcal{N}_a DSM(H_2O)}{RT h \mathcal{N}_a} = -\frac{P_s DSM(H_2O)}{RT h}$.

On en déduit $D = -\frac{dm}{dt} \frac{RT h}{P_s SM(H_2O)} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{3600} \frac{8,3 \cdot 300 \cdot 0,72}{5,07 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ c'est le bon ordre de grandeur pour la diffusion dans un gaz. Attention de bien convertir dm/dt en kg/s .

III. Sédimentation

1. Les molécules de protéine subissent leur poids: $\vec{P} = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3 g \vec{e}_z$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = +\rho \frac{4}{3} \pi a^3 g \vec{e}_z$ (c'est la résultante des forces de pression) et la force de frottements $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

La vitesse limite correspond à la situation où la somme des forces est nulle et les molécules ont alors un mouvement vertical descendant.

On écrit $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = \vec{0}$ soit $-(\rho_0 - \rho) \frac{4}{3} \pi a^3 g \vec{e}_z - \alpha \vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = -\frac{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 \alpha} \vec{e}_z$: les molécules tombent puisque $\rho_0 > \rho$, la vitesse est selon $-Oz$.

Remarque: certains ont projeté sur Oz et on trouve: $v_l = -\frac{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 \alpha} < 0$: la projection de la vitesse limite est négative sur Oz car les molécules tombent.

2. On applique juste la relation $\vec{j}_E(z) = n(z) \vec{v} = -\frac{n(z)(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 \alpha} \vec{e}_z$. Ce vecteur densité de courant est lié au phénomène de convection, il est dirigé selon $-Oz$ car les molécules tombent sous l'action de leur poids.

3. Les molécules tombent et s'accumulent au fond, il y a donc une différence de densités de protéines dans le récipient, les protéines diffusent alors des fortes densités (au fond du récipient) vers les faibles densités (en haut du récipient), soit la diffusion crée un mouvement ascendant de molécules. Le vecteur densité de courant de diffusion suit la loi de Fick soit $\vec{j}_D(z) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(z) \vec{e}_z = -D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$.

4. Le vecteur \vec{j}_E lié à la convection (sous l'action du poids) est vers le bas, le vecteur \vec{j}_D lié à la diffusion est vers le haut et en régime stationnaire la densité moléculaire ne dépend pas du temps donc le courant ascendant de molécules compense le courant descendant de molécules soit $\vec{j}_D + \vec{j}_E = \vec{0}$.

On a donc $-D \frac{dn}{dz} - \frac{n(z)(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 \alpha} = 0$ d'où l'équation différentielle $\frac{dn}{dz} + \frac{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 D \alpha} n(z) = 0$. Par identification avec l'énoncé on a $\delta = \frac{3 D \alpha}{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}$.

Remarque: certains ont écrit $-D \frac{dn}{dz} + n v_{lim} = 0$ soit $\frac{dn}{dz} + \frac{-v_{lim}}{D} n = 0$, on pose donc $\frac{-v_{lim}}{D} = \frac{1}{\delta} > 0$ car $v_{lim} < 0$, on remplace ensuite v_{lim} par son expression trouvée $v_l = -\frac{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}{3 \alpha} < 0$ et on retrouve bien $\delta = \frac{3 D \alpha}{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g}$.

5. La solution de cette équation s'écrit $n(z) = A e^{-z/\delta}$ (la densité moléculaire diminue quand on monte) et on a donc $\frac{n(z=0)}{n(z=h)} = \frac{A}{A e^{-h/\delta}} = e^{h/\delta} = 2$ d'où $h = \delta \ln 2 = \ln 2 \frac{3 D \alpha}{(\rho_0 - \rho) 4 \pi a^3 g} \approx \ln 2 \frac{3 D \alpha}{\rho_0 4 \pi a^3 g}$. On en déduit $\rho_0 = \frac{3 \ln 2 k_B T}{4 \pi a^3 g}$.