I. Réactions nucléaires

1. On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ et de longueur L (le volume de ce système est $2\pi rLdr$: surface du petit cylindre multipliée par l'épaisseur). En régime stationnaire la puissance reçue par le système est égale à la puissance perdue soit:

$P_{recue} = j_Q(r)2\pi rL + p_v 2\pi rLdr$

$P_{perdue} = j_Q(r + dr)2\pi(r + dr)L$

On a donc $j_Q(r)2\pi rL + p_v 2\pi rLdr = j_Q(r + dr)2\pi(r + dr)L$

ou encore $p_v 2\pi rLdr = j_Q(r + dr)2\pi(r + dr)L - j_Q(r)2\pi rL$

avec dr petit on a $p_v r = \dfrac{d}{dr}(j_Q(r)r)$

Or d'après la loi de Fourier on a $j_Q(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$ d'où en remplaçant dans l'équation de conservation de l'énergie: $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr}) = -\dfrac{p_v r}{\lambda}$.

2. On primitive cette équation une première fois par rapport à r: $r\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v r^2}{2\lambda} + A$

On divise par r: $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v r}{2\lambda} + \dfrac{A}{r}$

On primitive une deuxième fois par rapport à r: $T(r) = -\dfrac{p_v r^2}{4\lambda} + A\ln r + B$.

On observe que pour r tend vers zéro au centre du barreau, la température diverge or la température doit être définie pour $r < R$ donc on doit avoir $A = 0$.

On trouve B en écrivant la condition aux limites $T(r = R) = T_e = -\dfrac{p_v R^2}{4\lambda} + B$.

On a donc $T(r) = -\dfrac{p_v}{4\lambda}(r^2 - R^2) + T_e$.

La température est maximale au centre du barreau en $r = 0$, $T(r = 0) = T_{max} = \dfrac{p_v R^2}{4\lambda} + T_e$.