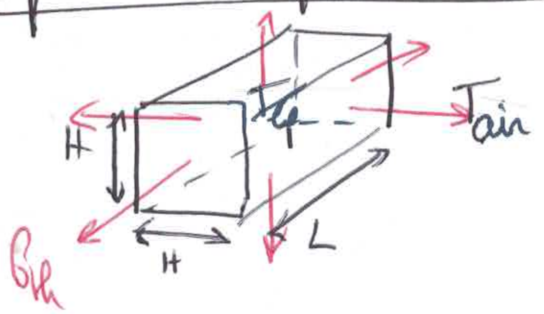
(I) Equilibre thermique d'une brebis

1)



Il y a de la diffusion thermique à travers l'épaisseur de laine des brebis. On définit la résistance thermique par :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_{ép} - T_{air}}{\Phi_{th}} = \frac{e}{\lambda_{lai} S}}$$ avec $S = 2H^2 + 4HL$

AN : $S = 1{,}38\ m^2$

$R_{th_M} = 1{,}81\ K\,W^{-1}$ pour $e_M = 10\ cm$

$R_{th_m} = 9{,}1.10^{-2}\ K\,W^{-1}$ pour $e_m = 0{,}5\ cm$

2) La résistance associée à la conducto-convection est définie par :

$$\boxed{R_{cc} = \frac{T_{ext} - T_{air}}{j_q \times S} = \frac{1}{hS}}$$

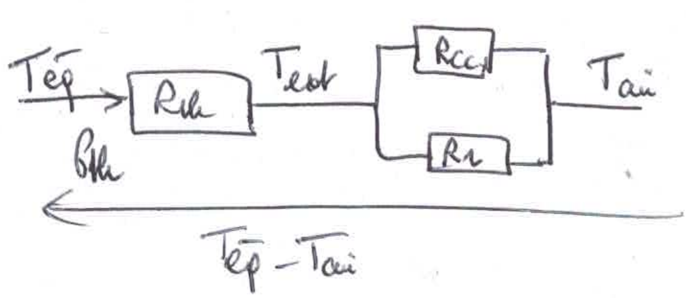
AN : $R_{cc} = 0{,}18\ K\,W^{-1}$

3) La résistance associée au rayonnement est définie par :

$$\boxed{R_r = \frac{T_{ext} - T_{air}}{\Phi_r} = \frac{1}{KS}}$$

AN : $R_r = 0{,}14\ K\,W^{-1}$

4) Schéma électrique équivalent



la résistance équivalente est

$$\boxed{R_{ép} = R_{th} + \frac{R_{cc} \times R_r}{R_{cc} + R_r}}$$

AN : $R_1 = 1{,}88\ K\,W^{-1}$ pour $e_M = 10\ cm$

$R_2 = 0{,}17\ K\,W^{-1}$ pour $e_m = 0{,}5\ cm$

On en déduit la puissance thermique perdue par la brebis :

$$\boxed{\Phi_{th} = \frac{T_{ép} - T_{air}}{R_{ép}}}$$

AN : $\Phi_{th_1} = 13{,}4\ W$ pour la brebis non tondue

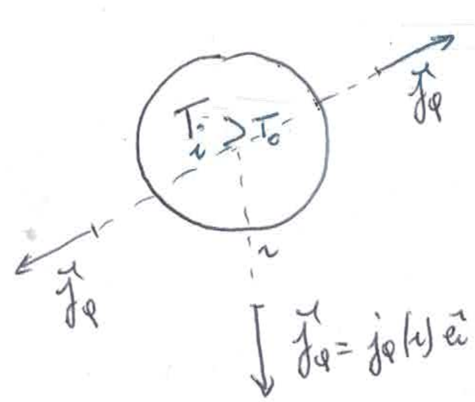
$\Phi_{th_2} = 170\ W$ pour la brebis tondue

En régime permanent, la température de la brebis est constante donc la puissance thermique qu'elle perd par diffusion, rayonnement et conducto-convection est égale à la puissance reçue de son métabolisme.

donc $\boxed{P_1 = \Phi_{th_1}}$ pour la brebis non tondue, $\boxed{P_2 = \Phi_{th_2}}$ pour la brebis tondue. L'épaisseur de laine joue un rôle considérable.

(II) Température d'un mammifère

1)

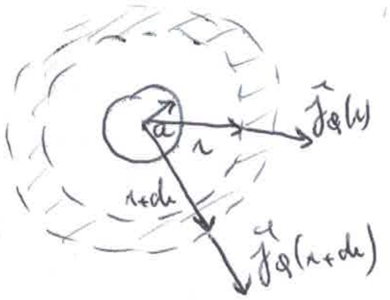


$T_0 = 6°C$ loin du mammifère

La diffusion thermique se fait dans le fluide autour du mammifère du chaud vers le froid donc $\underline{j_Q > 0}$.
(La température du fluide est plus élevée au voisinage de l'animal).

---

2)



La puissance thermique à travers la sphère de rayon r est $\boxed{\mathcal{P}_{th}(r) = j_Q(r)\,4\pi r^2}$

Soit le système composé de fluide et compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ (avec $r \geq a$). En régime stationnaire l'énergie reçue est égale à l'énergie perdue soit :

$$\delta Q_{reçue} = j_Q(r)\,4\pi r^2\,dt = \mathcal{P}_{th}(r)\,dt$$

$$\delta Q_{perdue} = j_Q(r+dr)\,4\pi(r+dr)^2\,dt = \mathcal{P}_{th}(r+dr)$$

donc $\mathcal{P}_{th}(r) = \mathcal{P}_{th}(r+dr)$ soit $\boxed{\mathcal{P}_{th} \text{ ne dépend pas de } r}$

---

3) On considère le système composé du mammifère ; en régime stationnaire le mammifère reçoit autant d'énergie que ce qu'il en perd.

$Q_{reçue} = p \times \frac{4}{3}\pi a^3\,dt$: énergie produite par son métabolisme

$Q_{perdue} = \mathcal{P}_{th}(a)\,dt$: énergie perdue par diffusion vers le fluide

soit $\mathcal{P}_{th}(a) = p\,\frac{4}{3}\pi a^3$ or $\mathcal{P}_{th}(a) = \mathcal{P}_{th}$: ne dépend pas de r

donc $\boxed{\mathcal{P}_{th} = p\,\frac{4}{3}\pi a^3}$

---

4) D'après la loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\,\vec{\text{grad}}\,T$ soit $j_Q = -\lambda\,\frac{dT}{dr}$

d'où $-\lambda\,\frac{dT}{dr}\,4\pi r^2 = p\,\frac{4}{3}\pi a^3$; on sépare les variables et on intègre :

$$-\lambda\int_{T(r)}^{T_0 = T(r\to\infty)} dT = \frac{p a^3}{3}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$ soit $$-\lambda\left(T_0 - T(r)\right) = \frac{p a^3}{3}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{p a^3}{3r}$$

d'où $\boxed{T(r) = T_0 + \frac{p a^3}{3\lambda r}}$

5) La température cutanée de l'animal est :

$$\boxed{T(r=a) = T_0 + \frac{p\,a^2}{3\lambda}} = T_c$$

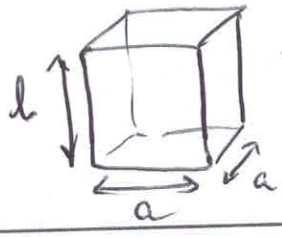
AN : $p = \frac{3\lambda(T_c - T_0)}{a^2}$. AN : $p_{air} = 9{,}6\ kW.m^{-3}$

$p_{eau} = 960\ kW\,m^{-3} \gg p_{air}$

Un mammifère dans l'eau doit fournir une puissance thermique beaucoup trop importante pour maintenir constante sa température interne.

III Assemblée de manchots

1)



La surface du corps du manchot est :

$$\boxed{A_1 = 2a^2 + 4al}$$ AN : $A_1 = 0{,}22\ m^2$

2)

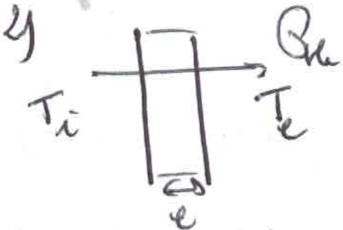


schéma électrique équivalent

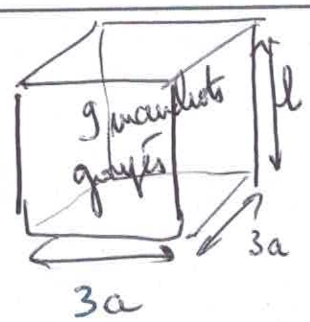
Le manchot perd de la chaleur par diffusion thermique à travers ses plumes on a :

$$\boxed{P_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{th}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda A_1}}$$

La température du manchot est constante, donc la puissance qu'il reçoit de son métabolisme est égale à la puissance perdue par diffusion soit : $P_1 = P_{th}$.

d'où $P_1 = \frac{(T_i - T_e)\lambda A_1}{e}$ on en déduit $\boxed{\lambda = \frac{P_1 e}{A_1 (T_i - T_e)}} = 4{,}0\cdot 10^{-2}\ W\,m^{-1}\,K^{-1}$

3)



la surface en contact avec l'air du groupe des 9 manchots est $\boxed{A_g = (3a)^2 \times 2 + 4 \times 3a \times l}$

AN : $A_g = 0{,}78\ m^2$

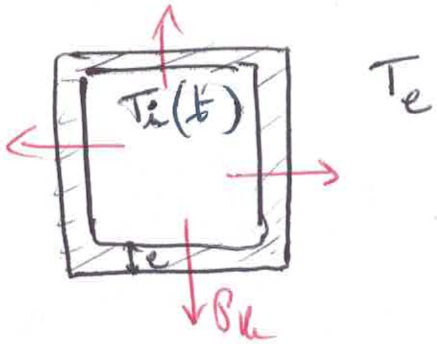
la puissance thermique perdue par diffusion par les plumes pour ce groupe de 9 manchots est :

$$\boxed{P_{th_g} = \frac{T_i - T_e}{\frac{e}{\lambda A_g}} = \frac{\lambda A_g (T_i - T_e)}{e}}$$ AN : $P_{th_g} = 177\ W$

Comme précédemment, en régime stationnaire, cette puissance perdue est compensée par la puissance du métabolisme donc $P_g = P_{th_g} = 177\ W$. Ce qui veut dire qu'en moyenne, le métabolisme d'un manchot doit fournir $\boxed{\frac{P_g}{9} = 20\ W}$.

Les manchots ont donc intérêt à se regrouper puisqu'ils n'ont besoin de fournir en moyenne que 20 W au lieu de 50 W lorsqu'ils sont seuls.

4) Pour maintenir sa température constante, le métabolisme d'un manchot isolé doit fournir $P_1 = 50\ W$ s'il ne fournit que $P_1 = 45\ W$, la température du manchot va diminuer.



Le manchot isolé perd la puissance thermique $P_{diff} = \frac{T_i - T_e}{R_{th}}$ avec $\boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda A_1}} = 1{,}14$ KW

et il reçoit la puissance $P_1 = 45$ W fournie par son métabolisme.

On applique le 1er principe de la thermodynamique à 1 manchot entre t et $t+dt$: $dU = \cancel{\delta W} + \delta Q$

avec $dU = c\rho a^2 l \left(T_i(t+dt) - T_i(t)\right) = c\rho a^2 l \frac{dT_i}{dt} \times dt$

avec $\delta Q = -P_{diff}\,dt + P_1\,dt = \left(-\frac{T_i - T_e}{R_{th}} + P_1\right)dt$

d'où $c\rho a^2 l \frac{dT_i}{dt} = -\frac{T_i - T_e}{R_{th}} + P_1$

donc $\boxed{\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\rho c a^2 l R_{th}} = \frac{P_1 R_{th} + T_e}{R_{th}\rho c a^2 l}}$

par identification : $\boxed{\tau = \rho c a^2 l R_{th}} = 2{,}38.10^4$ s

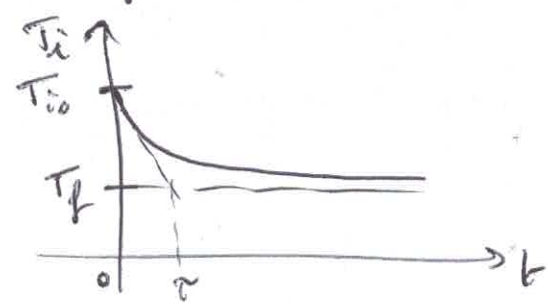
et $\boxed{T_f = P_1 R_{th} + T_e} = 31$ °C

On résout l'équation différentielle : $\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$

$$T_i(t) = T_f + Ae^{-t/\tau}$$

C.I. : $T_i(t=0) = T_{i0} = T_f + A$ soit $A = T_{i0} - T_f$

et $\boxed{T_i(t) = T_f + (T_{i0} - T_f)e^{-t/\tau}}$

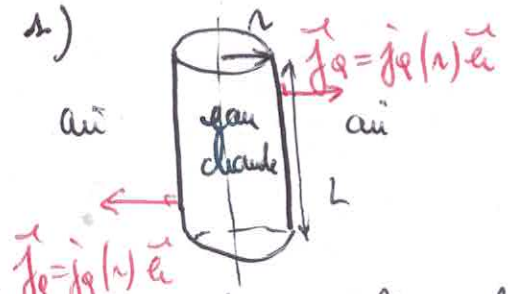


T_f est la température du manchot dans le nouveau régime permanent

τ est l'ordre de grandeur du temps au bout duquel son corps atteint T_f.

V) Canalisation d'eau

1)



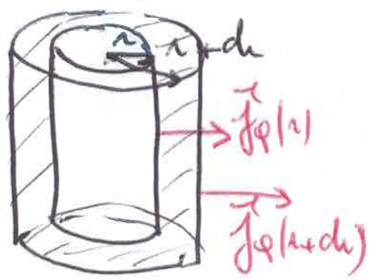
(La chaleur diffuse de l'eau chaude vers l'air qui est plus froid)

La diffusion thermique est radiale : $\boxed{\vec{j_Q} = j_Q(r)\,\vec{e_r}}$

La puissance thermique traversant le cylindre de longueur L et de rayon r est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}(r) = j_Q(r) \times \underbrace{2\pi r L}_{\text{surface latérale du cylindre}}}$$

2) Soit le système infinitésimal de conductivité λ compris entre les cylindres de longueur L et de rayons r et $r+dr$ (avec $R_1 < r < r+dr < R_2$),



En régime stationnaire, la température de ce système est constante donc la puissance thermique reçue $\mathcal{P}_{th}(r)$ est égale à la puissance thermique perdue $\mathcal{P}_{th}(r+dr)$.

Soit $\mathcal{P}_{th}(r) = \mathcal{P}_{th}(r+dr)$ donc $\boxed{\mathcal{P}_{th} \text{ ne dépend pas de } r}$

3) La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ soit $j_Q(r) = -\lambda \dfrac{dT}{dr}(r)$

d'où $\mathcal{P}_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dr} \times 2\pi r L$

en séparant les variables : $\mathcal{P}_{th} \dfrac{dr}{r} = -\lambda\, 2\pi L\, dT$

on intègre entre R_1 et R_2 :

$$\mathcal{P}_{th} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -2\pi \lambda L \int_{T(R_1)=T_e}^{T(R_2)=T_a} dT \quad \text{soit } \mathcal{P}_{th} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2\pi L \lambda (T_e - T_a)$$

d'où $$\boxed{T_e - T_a = \frac{\mathcal{P}_{th} \ln(R_2/R_1)}{2\pi L \lambda}}$$

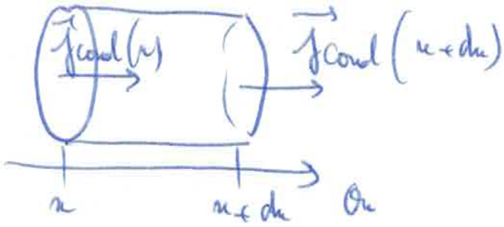
4) AN : $\mathcal{P}_{th} = \dfrac{2\pi \lambda L (T_e - T_a)}{\ln(R_2/R_1)} = \dfrac{2\pi \times 400 \times 50 \times (65-2)}{\ln\left(\frac{7}{6}\right)} = \underline{3{,}6 \cdot 10^6\ W}$

On en déduit l'énergie perdue pendant une heure : $E = \mathcal{P}_{th} \times \underbrace{\Delta t}_{3600\,s} = \underline{1{,}3 \cdot 10^{11}\ J}$

Anémomètre à fil chaud

On somme tous les transferts thermiques entrant et sortant qui se produisent par conduction

1/2

1) 

$$\delta Q_{cond} = \underbrace{j_{cond}(x) S dt}_{+\delta Q_{reçue}} - \underbrace{j_{cond}(x+dx) S dt}_{\delta Q_{perdue}}$$

$$\boxed{\delta Q_{cond} = -\frac{dj_{cond}}{dx}(x) S dt\, dx}$$

2) Le travail électrique dans la résistance s'écrit : $\boxed{\delta W_e = \underbrace{dR I^2}_{\text{puissance électrique}} dt}$

3) On applique le 1er principe de la thermo au système :

lorsque $T_f(x) > T_0$: $\delta Q_{conv} > 0$ et la chaleur sort

$$dU = \rho S dx \big(\underbrace{T(x,t+dt) - T(x,t)}_{= 0 \text{ régime stationnaire}}\big) = \delta Q_{cond} - \delta Q_{conv} + \delta W_e = 0$$

d'où $-\frac{dj_{cond}}{dx} \underbrace{S}_{\pi a^2} dt\, dx - h(T_f(x) - T_0) \underbrace{2\pi a\, dx}_{S_L} dt + dR I^2 dt = 0$

avec $dR = \frac{R_0}{l}\left(1 + \gamma(T_f(x) - T_0)\right) dx$

avec la loi de Fourier : $j_{cond} = -\lambda \frac{dT_f}{dx}$

soit $\lambda \frac{d^2T_f}{dx^2} \pi a^2 \cancel{dx} - h(T_f(x) - T_0) 2\pi a \cancel{dx} + \frac{R_0}{l}\left(1 + \gamma(T_f - T_0)\right) I^2 \cancel{dx} = 0$

soit
$$\boxed{\frac{d^2T_f}{dx^2} - (T_f - T_0)\underbrace{\left[2h\pi a - \frac{R_0 I^2 \gamma}{l}\right]\frac{1}{\lambda\pi a^2}}_{1/\delta^2} = \underbrace{-\frac{R_0 I^2}{l\lambda\pi a^2}}_{-K}}$$

4) On résout : $\frac{d^2\theta_f}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}\theta_f = -K$ avec $\theta_f = T_f - T_0$

éq. caractéristique : $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm 1/\delta$

solution homogène : $\theta_{f_h} = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$

solution particulière : $\theta_{f_p} = +K\delta^2$

d'où $\theta_f(x) = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta} + K\delta^2$

avec pour C.L. $\theta_f\left(x = \frac{l}{2}\right) = T_0 - T_0 = 0 = A e^{l/2\delta} + B e^{-l/2\delta} + K\delta^2$

$\theta_f(x = -l/2) = T_0 - T_0 = 0 = A e^{-l/2\delta} + B e^{+l/2\delta} + K\delta^2$

donc
$$\begin{cases} K\delta^2 = A e^{l/2\delta} + B e^{-l/2\delta} & (1) \\ K\delta^2 = A e^{-l/2\delta} + B e^{+l/2\delta} & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow (A-B)\left(e^{l/2\delta} - e^{-l/2\delta}\right) = 0 \text{ donc } \underline{A = B}$$

et $A = B = \dfrac{K\delta^2}{e^{l/2\delta} + e^{-l/2\delta}} = \dfrac{K\delta^2}{2\cosh\left(\frac{l}{2\delta}\right)}$.

on a donc $\boxed{\theta_f(x) = K\delta^2\left(1 - \dfrac{\cosh(x/\delta)}{\cosh(l/2\delta)}\right)}$

pour que la température soit uniforme, il faut $\delta \ll l$.