Exercices de cours sur la dynamique des fluides

I. **Enoncé:**

1. Ecrire l'équation de Navier-Stokes et donner la signification de chaque terme. Préciser l'unité de cette équation.

2. Pour les différents champs de vitesse suivants exprimer le laplacien de la vitesse: $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{v} = v(y,z)\overrightarrow{e_x}$.

3. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre le plan $y = -h$ de vitesse $-v_0\overrightarrow{e_x}$ et le plan $y = +h$ de vitesse $+v_0\overrightarrow{e_x}$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$. La pression dans le fluide est uniforme et on néglige le poids. Déduire de l'équation de Navier-Stokes l'expression de $v(y)$.

4. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre les plans immobiles $x = 0$ et $x = h$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$. La pression dans le fluide est $P(y) = P_0 - ay$ et on néglige le poids. Déduire de l'équation de Navier-Stokes l'expression de $v(x)$.

5. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre le plan immobiles $z = h$ et le plan $z = 0$ de vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$ et la pression dans le fluide est de la forme $P = P(y)$ avec $P(y = 0) = P_0$. On néglige le poids. On suppose ici que le fluide subit une force par unité de volume de la forme $\overrightarrow{f} = cy\overrightarrow{e_y}$ où c est une constante positive. Préciser l'unité de c et déduire de l'équation de Navier-Stokes les expressions de $v(x)$ et de $P(y)$.

6. L'écoulement de l'air autour d'un cycliste qui se déplace à $v = 20\ km.h^{-1}$ est-il laminaire ou turbulent? Donnée : $\eta_{air} = 10^{-5}\ Pl$.

II. **Correction:**

1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit $\rho(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

Cette équation est en $N.m^{-3}$

$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ est l'accélération de particule fluide

$\rho\overrightarrow{g}$ est la force poids volumique

$-\overrightarrow{\text{grad}}P$ est la force volumique de pression

$\eta\Delta\overrightarrow{v}$ est la force volumique de viscosité

2. Pour $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$.

Pour $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_z}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v}{dy^2}\overrightarrow{e_z}$.

Pour $\overrightarrow{v} = v(y,z)\overrightarrow{e_x}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\overrightarrow{e_x}$.

3. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}(v(y)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

La pression est uniforme donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \overrightarrow{0}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v(y)}{dy^2}\overrightarrow{e_x}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\dfrac{d^2v(y)}{dy^2} = 0$ soit $\dfrac{dv}{dy} = A$ et $v = Ay + B$.

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(y = -h) = -v_0 = -Ah + B$

$v(y = h) = +v_0 = Ah + B$

On ajoute les équations $2B = 0$ et on soustrait les équations $-2v_0 = -2Ah$ soit $A = \frac{v_0}{h}$.

On a donc $v(y) = \dfrac{v_0 y}{h}\overrightarrow{e_x}$.

4. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(x)\dfrac{\partial}{\partial y}(v(x)\overrightarrow{e_y}) = \overrightarrow{0}$

La pression est $P(y) = P_0 - ay$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \dfrac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y} = -a\overrightarrow{e_y}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{d^2v(x)}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\overrightarrow{0} = -a\overrightarrow{e_y} + \eta\dfrac{d^2v}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$ soit $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{a}{\eta}$.

On intègre deux fois par rapport à x: $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{ax}{\eta} + C$. et $v(x) = \dfrac{ax^2}{2\eta} + Cx + D$

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(x = 0) = 0 = D$

$v(x = h) = 0 = \dfrac{ah^2}{2\eta} + Ch$ d'où on en déduit C

Ainsi $v(x) = \dfrac{a}{2\eta}(x^2 - h^2)$.

5. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(z)\dfrac{\partial}{\partial x}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(z)\dfrac{\partial}{\partial x}(v(z)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

La pression dépend de y donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \dfrac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{d^2v(z)}{dz^2}\overrightarrow{e_x}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\overrightarrow{0} = -\dfrac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y} + \eta\dfrac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x} + cy\overrightarrow{e_y}$

La projection sur Oy donne: $0 = -\dfrac{dP}{dy} + cy$ soit $\dfrac{dP}{dy} = cy$ soit $P(y) = \dfrac{cy^2}{2} + D$ avec $D = P(y = 0) = P_0$

La projection sur Ox donne $\dfrac{d^2v}{dz^2} = 0$, on intègre deux fois par rapport à z soit $\dfrac{dv}{dz} = A$ et $v(z) = Az + B$.

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(z = 0) = v_0 = B$

$v(z = h) = 0 = Ah + v_0$ d'où on en déduit $A = -\dfrac{v_0}{h}$

Ainsi $v(x) = -\frac{v_0}{h}(z-h))$.

f est en N/m^3 donc $[c] = [\frac{f}{y}] = N.m^{-4}$.

6. Le nombre de Reynolds est égal à: $\mathcal{R}_e = \frac{\rho_{air} v L}{\eta_{air}} = \frac{1.\frac{20}{3,6}.1}{10^{-5}} \approx 5.10^5 >> 0$: l'écoulement de l'air autour du cycliste est turbulent.