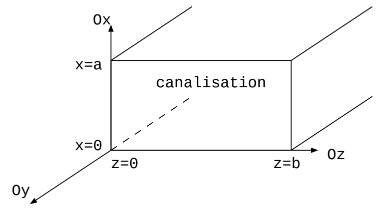
DS 5 de physique

Le sujet comprend trois problèmes et un exercice à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

I. **Exercice**

On étudie l'écoulement d'un fluide dans une canalisation comprise entre les plans $z = 0$ et $z = a$ et les plans $x = 0$ et $x = b$. Le champ de vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \dfrac{v_0 x z}{h^2}\overrightarrow{e_y}$ où h et v_0 sont des constantes.



1. L'écoulement est-il stationnaire ? incompressible? irrotationnel? Que peut-on en déduire sur la particule fluide au cours de son mouvement?

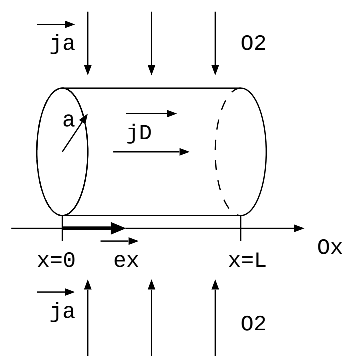
2. Calculer l'accélération d'une particule fluide. Décrire le mouvement de la particule fluide.

3. Calculer le débit volumique à travers une section de la canalisation. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

II. **Pb I : Diffusion de particules dans un capillaire**

On s'intéresse à un capillaire pulmonaire assimilable à un tube cylindrique (de rayon a et de longueur L) d'axe Ox caractérisé par une densité moléculaire en dioxygène $n_{O_2}(x)$. La densité moléculaire en dioxygène est supposée uniforme sur toute section du cylindre orthogonale à Ox.

On considère le régime stationnaire. On note $n_{O_2}(x = 0) = n_1$ la densité moléculaire en O_2 à l'entrée du capillaire et $n_{CO_2}(x = L) = n_2$ la densité moléculaire en O_2 à la sortie du capillaire. On note $\overrightarrow{j_D} = j_D(x)\overrightarrow{e_x}$ le vecteur densité de courant des molécules de O_2 et $\phi(x)$ le flux de O_2 rentrant en x dans le sens de $\overrightarrow{e_x}$ ($\phi(x)$ représente le nombre de particules qui traverse la section du capillaire en x par unité de temps).



Pour tenir compte de l'apport de molécules de O_2 par diffusion à travers la membrane alvéolo-capillaire on considère un vecteur densité de courant de O_2 entrant dans la capillaire donné par $j_a(x) = h(n_{ext} - n_{O_2}(x))$ où n_{ext} est la densité moléculaire en dioxygène dans l'alvéole pulmonaire et h est la perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire.

n_{ext} est supposée constante. Le capillaire est suffisamment long pour considérer que $n_{ext} = n_2 > n_1$.

1. Préciser l'unité de h en fonction des unités de base du système international.

2. En faisant un bilan de particules sur une tranche de cylindre comprise entre x et $x + dx$, montrer que le flux $\phi(x)$ suit l'équation différentielle suivante $\dfrac{d\phi}{dx} = 2\pi a h(n_2 - n_{O_2}(x))$.

3. Rappeler la loi de Fick et son sens physique en notant D_{O_2} le coefficient de diffusion du dioxygène dans le sang. Rappeler l'unité de D_{O_2} dans les unités du système international.

4. En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $n_{O_2}(x)$ peut se mettre sous la forme suivante: $\dfrac{d^2 n_{O_2}}{dx^2} - \dfrac{n_{O_2}}{l^2} = -\dfrac{n_2}{l^2}$. Exprimer l en fonction de a, h et D_{O_2}.

Faire l'application numérique pour l et donner un sens physique à ce paramètre. Données : Rayon typique d'un capillaire pulmonaire $a = 4,0\ \mu m$, Perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire: $h = 66.10^{-6}\ SI$, coefficient de diffusion de O_2 dans le sang: $D_{O_2} = 1,7.10^{-7}\ SI$.

5. La longueur d'un capillaire pulmonaire L est typiquement de 1 mm. En comparant l et L, expliquer succinctement que l'on puisse considérer que $L \to \infty$ dans la suite.

6. Exprimer $n_{O_2}(x)$ en fonction de n_1, n_2, x et l. Tracer l'allure de $n_{O_2}(x)$ et faire apparaître l sur votre graphique.

7. Exprimer ϕ_1, la quantité de dioxygène transférée par unité de temps de l'alvéole pulmonaire vers un capillaire pulmonaire en $molecules.s^{-1}$. En déduire ϕ_1', la quantité de dioxygène transférée par unité de temps de l'alvéole pulmonaire vers un capillaire pulmonaire en $mol.s^{-1}$.

On admet pour pur la suite que $\phi_1' = 2\pi ahl(c_{ext} - c_1)$ exprimé en $mol.s^{-1}$ avec c_{ext} la concentration en O_2 à la sortie et à l'extérieur du capillaire et c_1, la concentration en O_2 à l'entrée du capillaire.

En pratique, les données d'oxygénation du sang dans les capillaires pulmonaires sont données en terme de pression partielle de dioxygène P_{O_2} en $mmHg$. Afin de pouvoir comparer des données réelles aux résultats précédents, nous avons besoin d'introduire le coefficient de Henry σ tel que $C_{O_2} = \sigma P_{O_2}$ avec $\sigma = 1,7.10^{-3}\ mol.m^{-3}.mmHg$.

On note $P_{O_2,ext}$ la pression partielle en dioxygène dans une alvéole pulmonaire soit à l'extérieur et à la sortie du capillaire, et $P_{O_2,1}$ la pression partielle en dioxygène à l'entrée d'un capillaire pulmonaire.

8. Déterminer le volume molaire v_m d'un gaz parfait à 25^0C sous pression atmosphérique $P = 10^5\ Pa$. Donnée : Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ SI$.

9. En prenant en compte qu'il y a N capillaires pulmonaires placés en parallèle qui permettent l'oxygénation du sang, exprimer ϕ_{tot} la quantité de dioxygène transférée par unité de temps vers tous les capillaires (ϕ_{tot} en $mol.s^{-1}$).

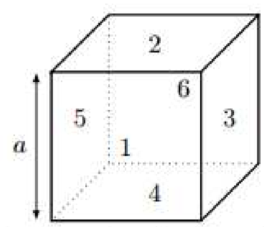
Pour un individu adulte au repos, le nombre de capillaires pulmonaires fonctionnels est de $N = 20.10^9$ et les pressions partielles en dioxygène sont $P_{O_2,ext} = 100\ mmHg$ et $P_{O_2,1} = 40\ mmHg$.

Déterminer le volume de dioxygène transféré par minute des poumons vers les capillaires pulmonaires. On notera v_{O_2} cette quantité et on l'exprimera en $L.min^{-1}$.

Comparer votre valeur de consommation d'oxygène à la valeur typiquement mesurée pour un individu adulte en bonne santé au repos : $v_{O_2} = 0,3\ L.min^{-1}$.

III. **Pb II: Déperditions thermiques à travers les parois de l'aquarium**

On considère un aquarium cubique ayant une longueur d'arête $a = 1,0\ m$. Celui-ci possède une face avant nettoyée de tout calcaire notée 1, formée d'une vitre en verre en contact avec l'air extérieur à la température constante $T_a = 12^0C$. À cause d'une eau comportant une concentration importante en minéraux au pH considéré, le calcaire et d'autres sels précipitent sur les autres parois. Ainsi les faces 2, 3, 4, 5 et 6 sont recouvertes d'une couche de tartre puis d'une couche de béton.

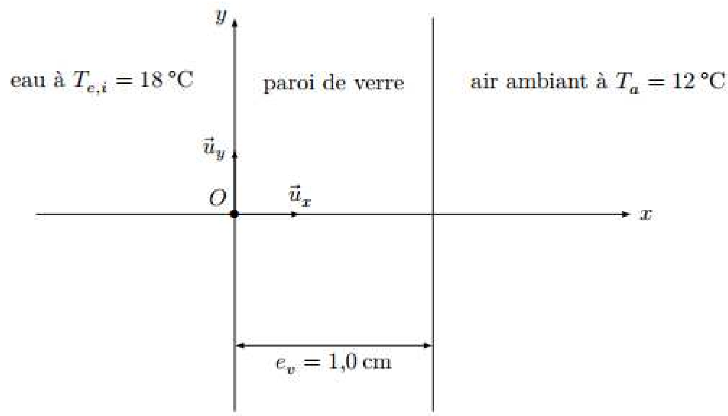


Numérotation des faces de l'aquarium

Données: masse volumique de l'eau et du verre $\rho = 1,0.10^3\ kg.m^{-3}$ et $\rho_v = 2,5.10^3\ kg.m^{-3}$, conductivité thermique du verre $\lambda_v = 1,1\ W.K^{-1}.m^{-1}$ et capacité thermique du verre $c_v = 720\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.

A- Renouvellement de l'eau

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la paroi 1 de l'aquarium. Elle est constituée de verre d'épaisseur $e_v = 1,0\ cm$ et sépare l'eau de l'aquarium de l'air extérieur. Les caractéristiques du verre sont données en fin d'énoncé. L'eau issue de la citerne d'approvisionnement est à la température initiale $T_{e,i} = 18^0C$. L'aquarium était vide depuis suffisamment de temps pour considérer que celui-ci est à la température de l'air ambiant $T_a = 12^0C$. On remplit progressivement l'aquarium avec l'eau de la citerne. On suppose que le vecteur densité de courant thermique dans la paroi de verre s'écrit $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{u_x}$ et on note $T(x,t)$ la température dans le verre.



1. Déduire du premier principe de la thermodynamique appliqué à un système convenablement choisi que $T(x,t)$ vérifie l'équation: $\rho_v c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_v \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Comment appelle-t-on le coefficient $\dfrac{\lambda_v}{\rho_v c_v}$? En quelle unité s'exprime-t-il ?

2. Exprimer la durée τ nécessaire à l'établissement du régime stationnaire. Calculer sa valeur numérique.

B- Régime stationnaire

On se place désormais dans le cas où le régime stationnaire est atteint.

3. Déterminer l'évolution de la température $T(x)$ selon l'axe (Ox) dans la paroi de verre 1. On suppose que $T(x=0) = T_{e,i}$ et $T(x=e_v) = T_a$.

4. Donner une représentation graphique de $T(x)$.

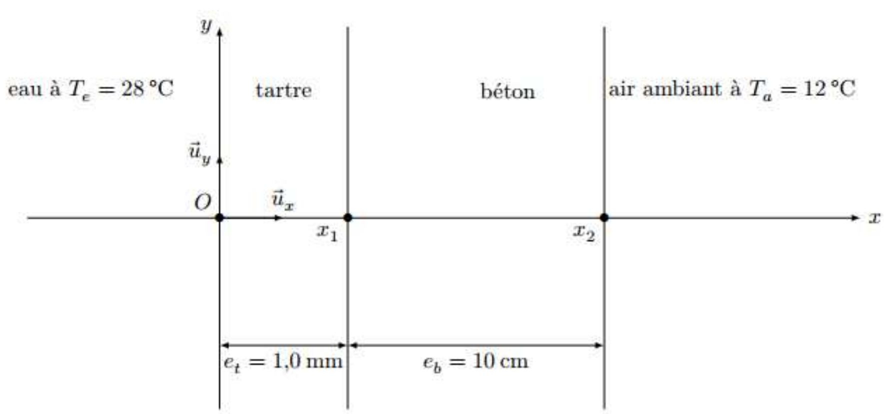
C- Pertes de puissance thermique

Dans cette partie C, les poissons de cet aquarium ont besoin d'une température d'eau constante $T_e = 28^0C$. On suppose que cette condition est réalisée grâce à un dispositif de chauffage. On se place en régime stationnaire.

C1- Pertes par conduction thermique

On suppose que les autres parois (2, 3, 4, 5 et 6) sont constituées d'une couche de tartre d'épaisseur $e_t = 1,0\ mm$, de conductivité thermique $\lambda_t = 0,78\ W.K^{-1}.m^{-1}$, puis d'une couche de béton d'épaisseur $e_b = 10\ cm$ de conductivité thermique $\lambda_b = 1,7\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

Représentation des parois 2 à 6



On ne tient compte dans cette section que du transfert thermique par conduction.

5. En raisonnant sur une analogie électrique,démontrer l'expression de la résistance thermique de conduction R_{cond} d'une plaque d'aire S, d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ.

On s'intéresse à une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton.

6. Déterminer l'expression puis la valeur de la résistance thermique de conduction R_{cond}, comprise entre les abscisses $x = 0$ et x_2, équivalente à l'association de la couche de tartre suivie de la couche de béton.

C2- Prise en compte de pertes convectives et du rayonnement

Les transferts convectifs entre la paroi de béton et l'air sont modélisés par la loi de Newton donnant le flux convectif $\phi_{conv} = h_{conv}S(T(x_2) - T_a)$. où $h_{conv} = 14\ W.m^{-2}.K^{-1}$, S est l'aire de la paroi, $T(x_2)$ la température du béton à l'abscisse x_2 et $T_a = 12^0C$ la température de l'air ambiant. On note R_{conv} la résistance thermique associée au transport convectif.

Le transfert thermique par rayonnement entre la paroi de béton et l'extérieur est modélisé par le flux de rayonnement total

$\phi_{ray} = h_{ray}S(T(x_2) - T_a)$ avec $h_{ray} = 4\epsilon\sigma T_a^3$ où $\sigma = 5,7.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$ est appelée constante de Stefan-Boltzmann, $\epsilon = 0,9$ est l'émissivité du béton caractérisant l'efficacité du transfert radiatif. On note R_{ray} la résistance thermique associée au transport radiatif.

7. Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer R_{conv} et R_{ray}. Déterminer leurs valeurs numériques.

8. Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer la résistance thermique R_{th} tenant compte des différents modes de transfert de la chaleur en fonction de R_{cond}, R_{conv} et R_{ray}. On s'appuiera sur un schéma électrique équivalent. Déterminer la valeur de R_{th}.

9. On suppose que la température du tartre à l'interface eau-tartre est égale à celle de l'eau ($T(x = 0) = T_e$). Exprimer et calculer la température $T(x_2)$ sur la paroi de béton.

C3- Bilan des pertes thermiques

10. Calculer la résistance thermique de la paroi de verre 1 en tenant compte des transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement. On donne, pour l'interface verre-air,$h_{conv,v} = 30\ W.m^{-2}.K^{-1}$ et l'émissivité du verre $\epsilon_v = 0,90$. On suppose que la température du verre à l'interface eau-verre est égale à celle de l'eau.

11. Estimer la puissance thermique perdue à travers l'ensemble des parois de l'aquarium. Quelle solution peut-on envisager pour limiter ces pertes ?

IV. Pb III : Température dans un crayon combustible

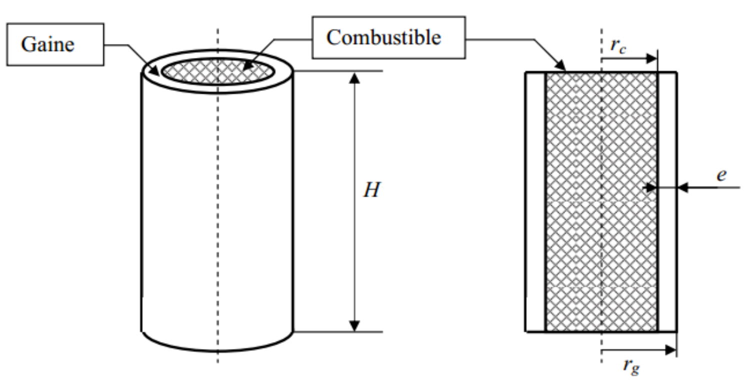
Afin d'évaluer les performances thermiques d'un réacteur nucléaire, différentes grandeurs sont utilisées, en voici leur définition:

- La puissance produite par les réactions de fission au sein du combustible est appelée puissance thermique, elles est notée P_{th}

- La puissance thermique volumique notée ϕ_v est la puissance produite par unité de volume de combustible

- La puissance électrique de la centrale notée P_e est reliée à la puissance thermique à travers le rendement global $\eta = \dfrac{P_e}{P_{th}}$ égal à 34 %. Pour un réacteur qui possède $N = 54\ 120$ crayons combustibles de hauteur $H = 4,3\ m$, le réacteur produit la puissance $P_e = 1\ 450\ MW$.

Un crayon combustible est constitué d'un cylindre de rayon $r_c = 4,0\ mm$ contenant le combustible entouré d'une gaine d'épaisseur $e = 0,5\ mm$. Le rayon extérieur de la gain est $r_g = 4,5\ mm$.

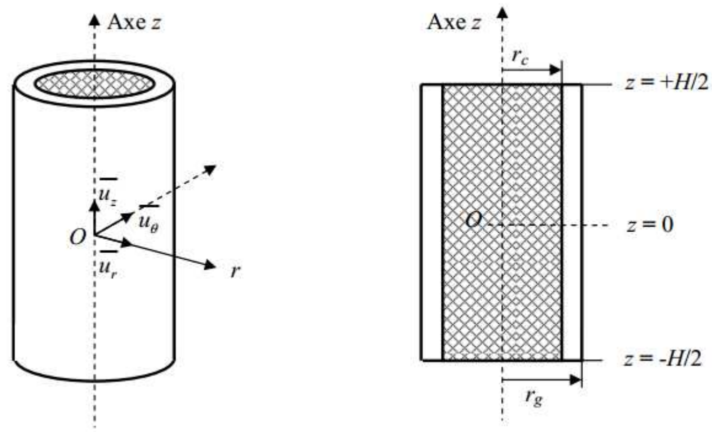


1. Donner l'expression littérale de la puissance volumique ϕ_v produite dans le combustible d'un crayon combustible. On notera qu'il n'y a aucune réaction nucléaire dans la gaine. Calculer ϕ_v en $W.cm^{-3}$.

2. La fission d'un noyau d'uranium 235 génère environ une énergie E_f de 200 MeV. Déterminer le nombre de fissions N_f réalisées si ce réacteur fonctionne à 100 % de sa puissance pendant 1 an. Donnée: 1 MeV =

$1,6.10^{-13}\ J$.

On note $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques, le vecteur densité de courant thermique dans le crayon combustible. On suppose donc que les transferts thermiques se font par diffusion et de façon radiale. L'axe d'un crayon est noté Oz. Données: conductivité thermique de la gaine $\lambda_g = 12,3\ W.m^{-1}.K^{-1}$, conductivité thermique du combustible $\lambda_c = 3,65\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $\phi_v = 365\ W.cm^{-3}$ (ϕ_v est une constante).



Pour établir l'équation de la chaleur dans le combustible à l'intérieur du crayon, on note c la capacité thermique massique du combustible, ρ sa masse volumique et λ_c sa conductivité thermique. La température s'écrit $T = T(r,t)$.

3. On considère le système élémentaire compris dans le combustible entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ avec $r < r+dr < r_c$ et de hauteur H.

3.a. Exprimer le volume élémentaire $d\tau$ de ce système.

3.b. Exprimer la variation d'énergie interne de ce système en fonction de ρ, c, H, r, dr, dt et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

3.c. Le combustible est le siège du phénomène de diffusion et de production d'énergie nucléaire, Déduire de l'application du premier principe de la thermodynamique une équation différentielle reliant $\dfrac{\partial (j_Q(r,t)r)}{\partial r}$, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$, ρ, c, r et ϕ_v.

3.d. Ecrire la loi de Fourier et donner son sens physique, en déduire l'équation de diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \phi_v + \frac{\lambda_c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Donnée: en coordonnées cylindriques: $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

Dans la suite, on se place en régime permanent.

4. Simplifier l'équation de diffusion thermique et en déduire l'expression de $T(r)$. On note $T_0 = T(r=0)$ la température au centre du combustible. En déduire la température $T_c = T(r=r_c)$ à la périphérie du combustible. Calculer $T_0 - T_c$.

5. On cherche maintenant la température dans la gaine soit $T(r)$ pour $r_c < r < r_g$. Simplifier l'équation de diffusion thermique dans le cas de la gaine et en déduire $T(r)$ en fonction des données, de $T_c = T(r=r_c)$ (on suppose que la température est continue) et de $T_g = T(r=r_g)$ la température la périphérie de la gaine.

6. La question précédente ne permet pas de calculer la différence de température $T_c - T_g$ entre les deux extrémités de la gaine. Pour l'obtenir, on propose la démarche suivante.

6.a. On considère le système de portion de gaine compris entre les cylindres de rayons r_c et $r < r_c$ et de hauteur H. Déduire de la conservation de l'énergie en régime stationnaire que l'on a $j_Q(r) = \dfrac{\phi_v r_c^2}{2r}$.

6.b. Utiliser la loi de Fourier et en déduire la température $T(r)$ dans la gaine sachant que $T(r = r_c) = T_c$. En déduire l'expression et la valeur numérique de $T_c - T_g = T(r=r_c) - T(r=r_g)$.