

Correction DS 5 de physique

I. Exercice

1. L'écoulement stationnaire car la vitesse ne dépend pas du temps.

$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_0 x z}{h^2} \right) = 0$ : l'écoulement est incompressible donc la particule fluide a une masse volumique constante au cours de son mouvement.

$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_0 x z}{h^2} \right) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_0 x z}{h^2} \right) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = \frac{v_0 z}{h^2} \vec{e}_z - \frac{v_0 x}{h^2} \vec{e}_x$ : l'écoulement est tourbillonnaire donc les particules fluide tournent sur elles mêmes.

2. L'accélération d'une particule fluide s'écrit  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$

avec  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) = \frac{v_0 x z}{h^2} \frac{\partial}{\partial y}$

soit  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{v_0 x z}{h^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_0 x z}{h^2} \vec{e}_z \right) = \vec{0}$ .

Les particules fluide ont une accélération nulle donc elles ont un mouvement rectiligne uniforme.

3. Le débit volumique à travers la surface  $Oxz$  perpendiculaire au vecteur vitesse s'écrit  $D_v = \int_{x=0}^{x=b} \int_{z=0}^{z=a} \frac{v_0 x z}{h^2} dx dz =$

$$\frac{v_0}{h^2} \int_{x=0}^{x=b} x dx \int_{z=0}^{z=a} z dz = \frac{v_0 b^2 a^2}{4h^2}.$$

La vitesse moyenne est  $v_{moy} = \frac{D_v}{ab} = \frac{v_0 ba}{4h^2}$ .

II. Diffusion de particules dans un capillaire

1.  $[j_a] = \text{particules} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

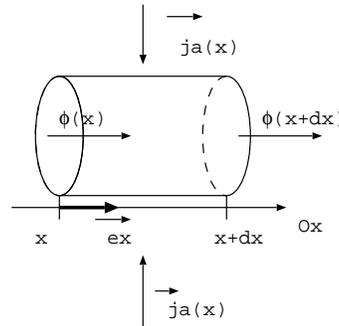
$[n] = \text{particules} \cdot \text{m}^{-3}$

$[h] = \left[ \frac{j_a}{n} \right] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ : homogène à une vitesse

2. On considère le système élémentaire composé de la zone de capillaire comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . En régime stationnaire, entre  $t$  et  $t + dt$ , le nombre de molécules de  $O_2$  qui entrent dans ce système est égal au nombre de molécules qui en sortent.

Le nombre de molécules qui entrent dans le système pendant  $dt$  est:  $\delta N_e = \phi(x)dt + j_a(x)2\pi a dx dt$

Le nombre de molécules qui sortent du système pendant  $dt$  est:  $\delta N_s = \phi(x + dx)dt$



On a donc  $\phi(x)dt + j_a 2\pi a dx dt = \phi(x + dx)dt$  soit  $\phi(x + dx) - \phi(x) = j_a 2\pi a dx = \frac{d\phi}{dx} dx$  par un DL avec  $dx$  petit. D'où  $\frac{d\phi}{dx} = j_a 2\pi a = 2\pi a h (n_2 - n_{O_2}(x))$ .

3. La loi de Fick s'écrit  $\vec{j}_n = -D_{O_2} \text{grad} n_{O_2} = -D_{O_2} \frac{dn_{O_2}}{dx} \vec{e}_x$ . Elle traduit que la diffusion des molécules de  $O_2$  se fait des fortes vers les faibles densités de particules et que la diffusion est d'autant plus efficace que le coefficient de diffusion est grand et que l'inhomogénéité de densité de particules est importante.

$[D_{O_2}] = \left[ \frac{j_n}{dn/dx} \right] = \frac{\text{particules} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{particules} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

4. On remplace dans l'équation de conservation avec  $\phi(x) = j_D(x)\pi a^2$  soit  $\frac{d\phi}{dx} = \pi a^2 \frac{dj_D}{dx} = -\pi a^2 D_{O_2} \frac{dn_{O_2}}{dx} = j_a 2\pi a = 2\pi a h (n_2 - n_{O_2}(x))$

On a donc  $\frac{d^2 n_{O_2}}{dx^2} - \frac{2h}{aD_{O_2}} n_{O_2} = -\frac{2h}{aD_{O_2}} n_2$ .

Par identification  $l = \sqrt{\frac{aD_{O_2}}{2h}}$ .

Analyse dimensionnelle de  $l$ :  $[l] = \left(\frac{mm^2 \cdot s^{-1}}{m \cdot s^{-1}}\right)^{1/2} = m$ :  $l$  désigne une longueur, c'est la longueur caractéristique sur laquelle la densité moléculaire en  $O_2$  varie.

AN:  $l = 72 \mu m$

5. On a  $l \ll L$ , on peut donc considérer  $L$  comme une longueur infinie.

6. L'équation différentielle  $\frac{d^2 n_{O_2}}{dx^2} - \frac{n_{O_2}}{l^2} = -\frac{n_2}{l^2}$  a pour solution particulière  $n_2$ .

On écrit l'équation caractéristique de l'équation sans second membre:  $r^2 - \frac{1}{l^2} = 0$  soit  $r = \pm \frac{1}{l}$  d'où la solution générale de la forme  $Ae^{-x/l} + Be^{+x/l}$ .

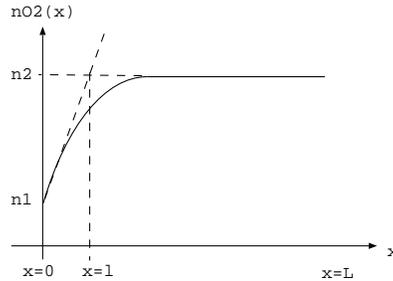
On a donc  $n_{O_2}(x) = Ae^{-x/l} + Be^{+x/l} + n_2$ .

On applique les conditions aux limites:

$n_{O_2}(x=0) = A + B + n_2 = n_1$

$n_{O_2}(x=L) = n_{O_2}(x=\infty) = Ae^{-\infty} + Be^{+\infty} + n_2 = n_2$  pour que ça ne diverge pas, il faut  $B = 0$

soit  $A = n_1 - n_2$  d'où  $n_{O_2}(x) = (n_1 - n_2)e^{-x/l} + n_2$ .



7. Sur la portion élémentaire de capillaire comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , le nombre de molécules de  $O_2$  transférée par unité de temps est  $j_a(x)2\pi adx = h(n_2 - n_{O_2}(x))2\pi adx = 2\pi ah(n_2 - n_1)e^{-x/l}dx$ .

On en déduit la quantité totale de  $O_2$  transférée par tout le capillaire en faisant l'intégrale sur la longueur du capillaire soit:

Le nombre de molécules de  $O_2$  transférées dans le capillaire par unité de temps est donc  $\phi_1 = \int_0^L 2\pi ah(n_2 - n_1)e^{-x/l}dx = 2\pi ah(n_2 - n_1)[-le^{-x/l}]_0^L = -l2\pi ah(n_2 - n_1)(e^{-L/l} - 1) \approx 2\pi ah(n_2 - n_1)l$ .

Pour convertir le nombre de molécules en nombre de moles, on divise par le nombre d'Avogadro soit  $\phi'_1 = \frac{2\pi ah l (n_2 - n_1)}{\mathcal{N}_a}$ .

8. On applique la loi des GP:  $PV = nRT$  soit le volume molaire  $v_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P} = 24,7 L \cdot mol^{-1}$  (attention de mettre la température en Kelvin soit  $25 + 273 = 298 K$  et le résultat  $v_m$  est  $24,7 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot mol^{-1}$ , on convertit ensuite en  $L \cdot mol^{-1}$ ).

9. Pour  $N$  capillaires on a  $\phi_{tot} = N\phi'_1 = 2\pi ahNl(c_2 - C_1) = 2\pi ahNl\sigma(P_{O_2,ext} - P_{O_2,1})$  moles de  $O_2$  transférée par seconde à l'ensemble des capillaires.

On en déduit le volume consommé par unité de temps en multipliant par le volume molaire, soit  $2\pi ahNl\sigma(P_{O_2,ext} - P_{O_2,1})v_m = 0,006 L \cdot s^{-1} = 0,36 L \cdot min^{-1}$  voisin de la valeur donnée  $0,3 L \cdot min^{-1}$ . Le modèle étudié est satisfaisant.

### III. Déperditions thermiques à travers les parois de l'aquarium

1. On considère un système élémentaire de verre compris entre  $x$  et  $x + dx$  et de section  $S = a^2$ . Ce système a pour masse  $\rho_v S dx$  et a pour température  $T(x, t)$  à l'instant  $t$  et  $T(x, t + dt)$  à l'instant  $t + dt$ . On lui applique le premier principe de la thermodynamique entre les instants  $t$  et  $t + dt$ :

$dU = \rho_v S dx c_v (T(x, t + dt) - T(x, t)) = \delta W + \delta Q$

avec  $\delta W = 0$

avec  $\delta Q = +j(x, t)S dt - j(x + dx, t)S dt = -\frac{\partial j}{\partial x}(x, t)S dt dx$  et d'après la loi de Fourier qui traduit que le

transfert thermique est dirigé des fortes vers les faibles températures on a  $\vec{j} = -\lambda_v \vec{\text{grad}}T$  soit  $j = -\lambda_v \frac{\partial T}{\partial x}$ .

En remplaçant dans  $\delta Q$  on a  $\delta Q = -\lambda_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dt dx$ .

D'où en remplaçant dans l'équation du premier principe:  $\rho_v c_v S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\lambda_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dt dx$ .

On en déduit l'équation de diffusion thermique  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_v}{\rho_v c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Le coefficient  $\frac{\lambda_v}{\rho_v c_v}$  s'appelle le coefficient de diffusion ou encore diffusivité. Il s'exprime en  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

2. Par analyse dimensionnelle à partir de l'équation de diffusion, on obtient:  $\frac{T}{\tau} = \frac{\lambda_v}{\rho_v c_v} \frac{T}{e_v^2}$  soit  $\tau = \frac{\rho_v c_v e_v^2}{\lambda_v}$ .

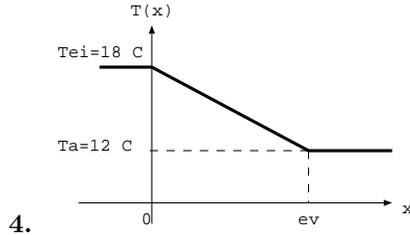
3. En régime stationnaire on a  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  soit  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

et donc par intégrations successives:  $T(x) = Ax + B$

avec les conditions aux limites  $T(x=0) = T_{e,i} = B$

et  $T(x=e_v) = Ae_v + B = T_a$  soit  $A = \frac{T_a - T_{e,i}}{e_v}$

d'où  $T(x) = \frac{T_a - T_{e,i}}{e_v} x + T_{e,i}$ .

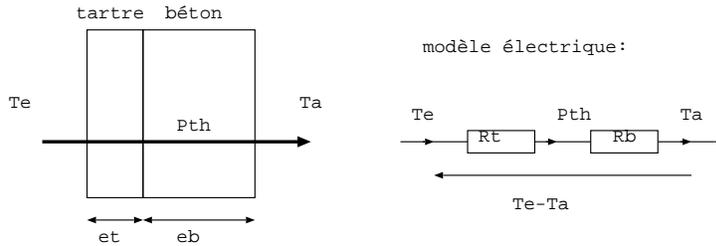


4.

5. En électricité, les électrons sont mis en mouvement par une différence de potentiel et le débit de charges est égal à l'intensité électrique. La loi d'Ohm s'écrit  $U = V_1 - V_2 = Ri$ .

En diffusion thermique, le transfert thermique est provoqué par la différence de températures et le courant thermique est la puissance thermique. L'analogue de la loi d'Ohm s'écrit  $T_1 - T_2 = R_{th} P_{th}$  avec  $P_{th} = j_{th} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{0 - e} S = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$  soit  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ .

6.



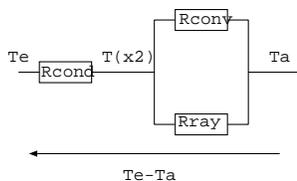
On associe aux couches de tartre et de béton les résistances thermiques  $R_t = \frac{e_t}{\lambda_t a^2} = 1,28 \cdot 10^{-3} K \cdot W^{-1}$  et  $R_b = \frac{e_b}{\lambda_b a^2} = 5,88 \cdot 10^{-2} K \cdot W^{-1}$ . Le tartre et le béton sont parcourus par le même flux thermique (soit la même intensité) donc les résistances associées sont en série.

La résistance équivalente à l'ensemble est donc  $R_{cond} = R_t + R_b = 6,0 \cdot 10^{-2} K \cdot W^{-1}$ .

7. Par analogie avec la loi d'Ohm pour la convection on a  $R_{conv} = \frac{T(x_2) - T_a}{\phi_{conv}} = \frac{1}{h_{conv} S} = \frac{1}{h_{conv} a^2} = 7,14 \cdot 10^{-2} K \cdot W^{-1}$ .

Par analogie avec la loi d'Ohm pour le rayonnement on a  $R_{ray} = \frac{T(x_2) - T_a}{\phi_{ray}} = \frac{1}{h_{ray} S} = \frac{1}{h_{ray} a^2} = 2,10 \cdot 10^{-1} K \cdot W^{-1}$ .

8. Le modèle électrique équivalent est:



La résistance équivalente est  $R_{th} = R_{cond} + \frac{R_{conv} R_{ray}}{R_{conv} + R_{ray}} = 1,1 \cdot 10^{-1} K \cdot W^{-1}$ .

9. On applique un pont diviseur de tension:  $T_e - T(x_2) = \frac{R_{cond}}{R_{th}} (T_e - T_a)$  on en déduit la température de

surface du béton:  $T(x_2) = T_e - \frac{R_{cond}}{R_{th}}(T_e - T_a) = 19,3^0C$ .

10. La résistance équivalente à la paroi de verre en tenant compte de la convection et du rayonnement (par analogie avec une question précédente) est  $R_1 = R_v + \frac{R_{conv}R_{ray}}{R_{conv} + R_{ray}} = 3,8.10^{-2} K.W^{-1}$ .

11. La puissance thermique perdue par une surface de type tartre-béton est  $P_{t-b} = \frac{T_e - T_a}{R_{th}}$ . La puissance perdue par les 5 surfaces identiques de type tartre-béton est donc  $5P_{t-b} = 5\frac{T_e - T_a}{R_{th}} = 727 W$

La puissance thermique perdue par la surface 1 est  $P_1 = \frac{T_e - T_a}{R_1} = 421 W$

Soit au total une puissance perdue de 1,15 kW.

#### IV. Température dans un crayon combustible

1. La puissance volumique  $\phi_v$  produite dans le combustible est égale à la puissance produite dans le combustible divisée par le volume  $\pi r_c^2 H$  du combustible soit  $\phi_v = \frac{P_{th}}{\pi r_c^2 H}$  avec  $P_{th} = \frac{P_e}{\eta N} = 78,8 kW$  soit  $\phi_v = 365 W.cm^{-3}$  (j'ai pris  $r_c = 0,4 cm$  et  $H = 430 cm$ ).

2. La fission d'un noyau d'uranium 235 génère environ une énergie  $E_f = 200 MeV = 3,2.10^{-11} J$ .

La puissance thermique totale utilisée par le réacteur est  $P_{th} = \frac{P_e}{\eta} = 4,265.10^9 W$  (j'ai pris  $\eta = 0,34$  et  $1 MW = 10^6 W$ ). Pour avoir l'énergie produite pendant 1 an, il faut multiplier la puissance par le temps  $\Delta t = 1 an = 365.24.3600 = 3,154.10^7 s$ . On a donc une énergie totale  $E = P_{th}\Delta t = 1,345.10^{17} J$

On en déduit le nombre de fissions  $N_f = \frac{E}{E_f} = 4,2.10^{27}$  fissions.

3. **3.a.** Le volume élémentaire  $d\tau$  est  $d\tau = 2\pi r H dr$  (surface latérale du petit cylindre multipliée par son épaisseur).

**3.b.** La variation d'énergie interne de ce système entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit  $dU = \rho d\tau c(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho c 2\pi r H dr \frac{\partial T}{\partial t} dt$  car  $dt$  petit.

**3.c.** On applique le premier principe de la thermodynamique au système entre  $t$  et  $t + dt$ :

$\delta Q_e = j_Q(r, t) 2\pi r H dt$  est l'énergie qui entre par diffusion dans le système

$\delta Q_s = j_Q(r + dr, t) 2\pi(r + dr) H dt$  est l'énergie qui sort par diffusion du système

$\delta Q_p = \phi_v 2\pi r dr H dt$  est l'énergie produite par les réactions de fission.

On a  $dU = +\delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_p$

soit  $dU = \rho c 2\pi r H dr \frac{\partial T}{\partial t} dt = -(j_Q(r + dr, t)(r + dr) - j_Q(r, t)r) 2\pi H dt + \phi_v 2\pi r dr H dt$

avec  $dr$  petit on a:  $dU = \rho c 2\pi r H dr \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial}{\partial r}(j_Q(r, t)r) dr 2\pi H dt + \phi_v 2\pi r dr H dt$

d'où l'équation de conservation de l'énergie:  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(j_Q(r, t)r) + \phi_v$ .

**3.d.** La loi de Fourier dans le combustible s'écrit  $\vec{j}_Q = -\lambda_c \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$ . Elle traduit que la diffusion thermique se fait des fortes vers les faibles températures soit ici du centre vers la périphérie des crayons.

On remplace  $j_Q(r, t)$  par  $-\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r}$  et on obtient l'équation de diffusion cherchée:  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \phi_v + \frac{\lambda_c}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial T}{\partial r})$

4. En régime permanent, la température ne dépend pas du temps donc  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  soit à résoudre  $\frac{d}{dr}(r \frac{dT}{dr}) = -\frac{\phi_v r}{\lambda_c}$ .

On intègre par rapport à  $r$  soit:  $r \frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_v r^2}{2\lambda_c} + A$ .

On divise par  $r$ :  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_v r}{2\lambda_c} + \frac{A}{r}$ .

Et on intègre par rapport à  $r$  soit:  $T(r) = -\frac{\phi_v r^2}{4\lambda_c} + A \ln r + B$

On remarque que la température n'est pas définie en  $r = 0$ , car le terme  $A \ln r$  diverge, on doit donc avoir  $A = 0$ .

On utilise la condition aux limites  $T_0 = T(r = 0) = B$  d'où  $T(r) = -\frac{\phi_v r^2}{4\lambda_c} + T_0$ .

On en déduit  $T_c = T(r = r_c) = -\frac{\phi_v r_c^2}{4\lambda_c} + T_0$  à la périphérie du combustible.

On a donc  $T_0 - T_c = \frac{\phi_v r_c^2}{4\lambda_c} = 400 \text{ K}$ .

**5.** Dans la gaine, il n'y a pas de réaction nucléaire donc  $\phi_v = 0$  et dans la gaine la conductivité est  $\lambda_c$  d'où à résoudre en régime permanent  $\frac{d}{dr}(r \frac{dT}{dr}) = 0$  soit  $r \frac{dT}{dr} = C$  et  $\frac{dT}{dr} = \frac{C}{r}$  et donc en intégrant par rapport à  $r$  on a  $T(r) = C \ln r + D$ .

On écrit que la température est continue en  $r_c$  soit  $T(r = r_c) = T_c = C \ln r_c + D$

On écrit la température à la périphérie de la gaine  $T(r = r_g) = T_g = C \ln r_g + D$

On fait la différence de ces deux équations et on trouve  $C$ :  $T_c - T_g = C(\ln r_c - \ln r_g) = C \ln(\frac{r_c}{r_g})$  soit

$$C = \frac{T_c - T_g}{\ln(\frac{r_c}{r_g})}.$$

On en déduit  $D$  par l'une ou l'autre de équations  $D = T_c - C \ln r = T_c - \frac{T_c - T_g}{\ln(\frac{r_c}{r_g})} \ln r$ .

On a donc la température dans la gaine  $T(r) = \frac{T_c - T_g}{\ln(\frac{r_c}{r_g})} \ln(\frac{r}{r_c}) + T_c$ .

Remarque: si on utilise la deuxième équation on trouve  $D = T_g - C \ln r = T_g - \frac{T_c - T_g}{\ln(\frac{r_c}{r_g})} \ln r$  et  $T(r) =$

$\frac{T_c - T_g}{\ln(\frac{r_c}{r_g})} \ln(\frac{r}{r_g}) + T_g$ . Les deux solutions sont correctes.

**6. 6.a.** En régime stationnaire la température du système étudié est constante donc la puissance reçue par ce système est égale à la puissance perdue par ce système. Ce système reçoit la puissance produite par les réactions nucléaires dans le combustible soit  $P_r = \phi_v \pi r_c^2 H$ .

Le système perd la puissance par diffusion thermique à travers la surface du cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $H$  soit  $P_p = j_Q(r) 2\pi r H$ .

On a donc  $\phi_v \pi r_c^2 H = j_Q(r) 2\pi r H$  soit  $j_Q(r) = \frac{\phi_v r_c^2}{2r}$ .

**6.b.** On écrit la loi de Fourier dans la gaine  $\vec{j}_Q = -\lambda_g \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$  soit  $j_Q(r) = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial r}$ . On remplace dans l'équation de conservation de l'énergie écrite précédemment soit  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_v r_c^2}{2r \lambda_g}$ .

On intègre et on obtient  $T(r) = -\frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln r + E$ .

On utilise la condition aux limites  $T(r = r_c) = T_c = -\frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln r_c + E$  soit  $E = \frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln r_c + T_c$ .

On a alors  $T(r) = \frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln(\frac{r_c}{r}) + T_c$ .

On en déduit  $T_c - T_g = T_c - T(r = r_g) = \frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln(\frac{r_g}{r_c}) = 28 \text{ K}$ .