Correction des exercices du chapitre MF5

I. Force exercée sur un embout

1. $v_1 = \dfrac{D_v}{\pi R_1^2} = 1,27\ m/s$ et $v_2 = \dfrac{D_v}{\pi R_2^2} = 5,1\ m/s$

2. Hypothèses: l'écoulement est incompressible et stationnaire, le fluide est parfait et il n'y a pas d'autres forces que les forces de pression et de pesanteur.

On applique Bernoulli sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie en négligeant le poids comme c'est dit dans l'énoncé: $P_1 + \dfrac{\rho v_1^2}{2} = P_0 + \dfrac{\rho v_2^2}{2}$ d'où $P_1 = P_0 + \dfrac{\rho(v_2^2 - v_1^2)}{2} = 1,12.10^5\ Pa$.

3. Le système fermé Σ^* à l'instant t est composé de Σ ajouté de la masse $\delta me = \rho D_v dt$ soit $\overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{p_\Sigma} + \rho D_v dt \overrightarrow{v_1}$.

Le système fermé Σ^* à l'instant $t + dt$ est composé de Σ ajouté de la masse $\delta ms = \rho D_v dt$ soit $\overrightarrow{p^*}(t + dt) = \overrightarrow{p_\Sigma} + \rho D_v dt \overrightarrow{v_2}$.

On a $d\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p^*}(t + dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = \rho D_v(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$.

On applique la loi de la quantité de mouvement au système Σ^* soit $\dfrac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$ avec pour forces extérieures: le poids (négligé), les forces de pression à l'entrée et à la sortie $\overrightarrow{F_p} = (+P_1\pi R_1^2 - P_0\pi R_2^2)\overrightarrow{e_x}$, la force de la canalisation sur le fluide notée $\overrightarrow{F}_{embout/fluide}$.

On a donc $\dfrac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = \rho D_v(v_2 - v_1)\overrightarrow{e_x} = F_{embout/fluide}\overrightarrow{e_x} + (+P_1\pi R_1^2 - P_0\pi R_2^2)\overrightarrow{e_x}$ soit $\overrightarrow{F}_{embout/fluide} = (P_0\pi R_2^2 - P_1\pi R_1^2 + \rho D_v(v_2 - v_1))\overrightarrow{e_x}$.

II. Puissance fournie à une turbine

On note Σ le système ouvert et fixe compris entre AB et CD.

Le système fermé Σ^* à l'instant t est composé de Σ ajouté de la masse $\delta me = \rho D_v dt$ soit $E_m^*(t) = E_{m,\Sigma} + \rho D_v dt g z_1 + \dfrac{\rho D_v dt v_1^2}{2}$.

Le système fermé Σ^* à l'instant $t + dt$ est composé de Σ ajouté de la masse $\delta ms = \rho D_v dt$ soit $E_m^*(t + dt) = E_{m,\Sigma} + \rho D_v dt g z_2 + \dfrac{\rho D_v dt v_2^2}{2}$.

Le système Σ^* subit les forces de pression $+P_1\pi R_1^2\overrightarrow{e_x}$ en entrée et$-P_2\pi R_2^2\overrightarrow{e_x}$ qui fournissent une puissance $P(pression) = P_1\pi R_1^2 v_1 - P_2\pi R_2^2 v_2$.

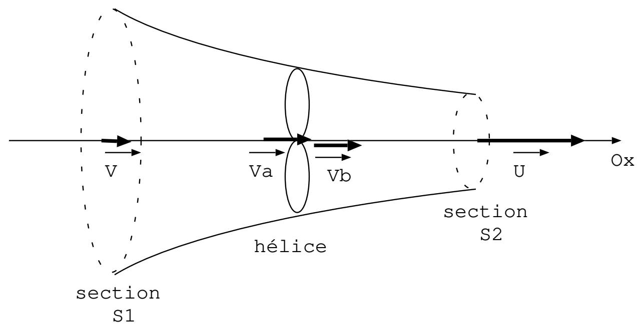
Le système fluide subit son poids (compté dans l'énergie potentielle).

Le système fluide subit l'action de l'hélice dont on cherche la puissance $P(helice)$.

Le système fluide subit l'action des parois dont la puissance est nulle car les forces des parois sur le fluide sont en tout point perpendiculaire aux parois soit perpendiculaires à la vitesse du fluide.

On applique le théorème de la puissance mécanique: $\dfrac{dE_m^*}{dt} = \rho D_v g(z_2 - z_1) + \dfrac{\rho D_v(v_2^2 - v_1^2}{2} = P(helice) + P(pression)$ d'où $P(helice) = \dfrac{\rho}{2} D_v(v_2^2 - v_1^2) + \rho D_v g(z_2 - z_1) + D_v(P_2 - P_1)$.

III. Débit d'un ventilateur



1. Les lignes de courant se resserrent, cela signifie que la vitesse augmente. Effectivement, le ventilateur reçoit de l'énergie électrique qui fait tourner l'hélice et le fluide est accéléré.

2. On utilise la conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible $v_a = v_b = \dfrac{D_v}{\pi R^2}$.

3. On définit le système Σ^*

à l'instant t composé de Σ et de la masse qui entre $\delta m_e = \rho D_v dt$ entre t et $t+dt$

à l'instant t composé de Σ et de la masse qui sort $\delta m_s = \rho D_v dt$ entre t et $t+dt$

Ce système subit les forces de pression à l'entrée, à la sortie et sur la surface latérale du tube ainsi que la force de l'hélice sur le fluide.

La puissance des forces de pression en entrée et en sortie: $P(\overrightarrow{F_p}) = P_0 S_1 u - P_0 S_2 U = P_0(D_v - D_v) = 0$.

La puissance des forces de pression sur la surface latérale du tube est nulle car les forces sont perpendiculaires à la surface soit perpendiculaires à la vitesse.

Le théorème de la puissance cinétique appliquée à un système fermé et mobile Σ^* s'écrit $\dfrac{dE_c^*}{dt} = D_m(\dfrac{U^2 - v^2}{2} \approx \rho D_v \dfrac{U^2}{2} = P(helice)$.

La puissance de la force de l'hélice est $P(helice) = \overrightarrow{F}_{helice/fluide}.\overrightarrow{v_a} = F_{helice/fluide} v_a = \rho D_v \dfrac{U^2}{2}$

4. On applique la loi de la quantité de mouvement à Σ^*: $\dfrac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = D_m(\overrightarrow{U} - \overrightarrow{v} \approx \rho D_v \overrightarrow{U} = \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F}_{helice/fluide}$.

Or la résultante des forces de pression est nulle sur toute la surface car la pression est uniforme.

On a donc $F_{helice/fluide} = \rho D_v U$.

On a $F_{helice/fluide} = \rho D_v U = \rho D_v \dfrac{U^2}{2v_a}$ soit $U = 2v_a$.

5. $P(helice) = \rho D_v \dfrac{U^2}{2} = 2\rho D_v v_a^2 = 2\rho D_v (\dfrac{D_v}{\pi R^2})^2 = \dfrac{2\rho D_v^3}{\pi^2 R^3}$.

IV. Correction : force sur un coude

1. Ecoulement incompressible : conservation du débit volumique $v_1 = v_2$

Hypothèses: écoulement permanent, fluide parfait et incompressible, pas de pièces mobiles

Bernoulli sur une ligne de courant entre AB et DC: $\dfrac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \dfrac{\rho v_2^2}{2} + P_2$ soit $v_1 = v_2$ donne $P_1 = P_2$

2. On définit un système fermé Σ^* qui, à l'instant t, est constitué de Σ et d'une masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ à la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et, à l'instant $t+dt$ est constitué de Σ et d'une masse sortante $\delta m_s = D_m dt$ à la vitesse $\overrightarrow{v_2}$.

$\overrightarrow{p^*}(t+dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{dp^*} = \overrightarrow{p} + \delta m_s \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{p} - \delta m_e \overrightarrow{v_1} = D_m dt(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = \rho D_v dt v_1(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x}) = \dfrac{\rho D_v^2 dt}{\pi R^2}(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x})$.

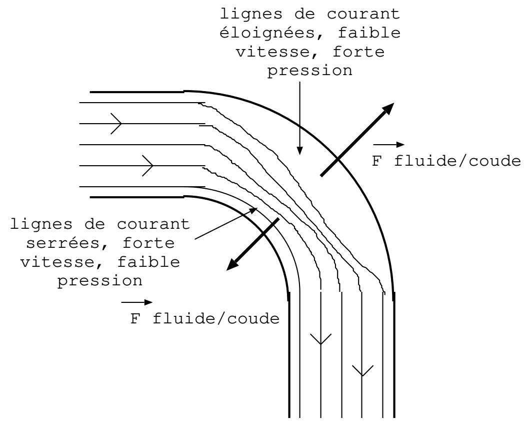
3. Forces exercées sur le fluide: poids : négligé, pression $P_1 \pi R^2 \overrightarrow{e_x} + P_2 \pi R^2 \overrightarrow{e_y} = P_1 \pi R^2 (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$ et la force du coude sur le fluide (1 *point*).

On applique la loi de la quantité de mouvement au système fermé Σ^* : $\dfrac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$

$\dfrac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = P_1 \pi R^2 (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}) + \overrightarrow{F}_{coude/fluide} = \dfrac{\rho D_v^2}{\pi R^2}(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x})$ d'où $\overrightarrow{F}_{coude/fluide} = -(\dfrac{\rho D_v^2}{\pi R^2} + P_1 \pi R^2)(\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x})$

On a ensuite $\overrightarrow{F}_{coude/fluide} = -\overrightarrow{F}_{fluide/coude}$.

4.



V. **Correction : turboréacteur (CCINP PC 2020)**

1. Le système Σ^* à t est composé de Σ et de la masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ de quantité de mouvement $Dmdt\overrightarrow{v_e}$ d'où $\overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{p}(t) + D_m dt\overrightarrow{v_e}$.

2. Le système Σ^* à $t+dt$ est composé de Σ et de la masse entrante $\delta m_s = D_m dt$ de quantité de mouvement $Dmdt\overrightarrow{v_s}$ d'où $\overrightarrow{p^*}(t+dt) = \overrightarrow{p}(t+dt) + D_m dt\overrightarrow{v_s}$.

3. On écrit la variation de la quantité de mouvement:
$d\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p^*}(t+dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{p}(t+dt) + D_m dt\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{p}(t) - D_m dt\overrightarrow{v_e} = D_m dt(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$ en régime stationnaire car $\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p}(t+dt)$.

4. L'air dans le turboréacteur subit les forces:

- poids $\overrightarrow{P}$

- de pression $\overrightarrow{F_p}$ comprenant $P_0 S_e \overrightarrow{e_x}$ en entrée et $-P_0 S_s \overrightarrow{e_x}$ en sortie

- du réacteur sur l'air $\overrightarrow{F}_{reacteur \to air}$

5. La loi de la quantité de mouvement appliquée au système fermé Σ^* s'écrit:

$$\frac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F}_{reacteur \to air} = D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$$

donc $\overrightarrow{F}_{reacteur \to air} = D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}) - \overrightarrow{P} + P_0(S_s - S_e)\overrightarrow{e_x} \approx D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$ à condition que l'on puisse négliger le poids et que les sections d'entrée et de sortie S_e et S_s soient très voisines.

6. La force exercée par l'air sur le réacteur est l'opposée de la force exercée par le réacteur sur l'air. On a $\overrightarrow{F}_{reacteur \to air} = D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$ donc pour que cette force soit selon Ox il faut $v_s > v_e$.