DM 5 de physique

I. **Force de traînée**

Une bille solide sphérique de rayon R et de masse volumique ρ_s tombe dans un fluide visqueux de masse volumique ρ_l et de viscosité η. On suppose que la force de traînée s'écrit $-6\pi R\eta\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la bille par rapport au fluide.

1. Exprimer la vitesse limite v_l atteinte très rapidement par la bille. En déduire η en fonction des données et de v_l. Données: $\rho_s = 300\ kg.m^{-3}$, $\rho_l = 126\ kg.m^{-3}$, $v_l = 8\ mm.s^{-1}$ et $R = 4,5\ mm$.

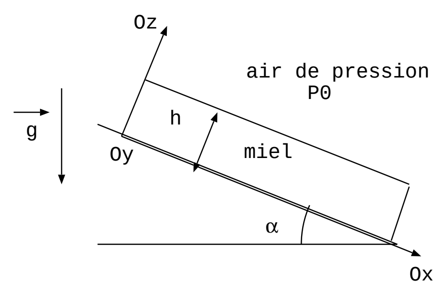
2. Calculer le nombre de Reynolds et justifier a posteriori l'expression de la force de traînée.

II. **Ecoulement d'un glacier**

Un glacier est une masse de glace qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées; écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace. Du fait de sa plasticité, un glacier s'écoule lentement sous l'effet de la gravité le long d'une pente avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. Sa vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groenland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an.

En préambule à l'étude d'un glacier, intéressons nous à l'écoulement d'un fluide visqueux , par exemple une couche de miel, sur une plaque plane inclinée.

Une couche d'épaisseur constante h, d'un fluide incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. A l'interface air-miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions Ox et Oy sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel. L'écoulement est réalisé en régime permanent.



On note $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique.

1. On écrit la vitesse sous la forme $\overrightarrow{v}(M) = v(z)\overrightarrow{e_x}$. Montrer que cette vitesse est compatible avec un écoulement incompressible et stationnaire et tracer l'allure des lignes de courant.

2. On donne l'équation de Navier Stokes: $\rho\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$. Simplifier cette équation et la projeter sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$ dans le cas où la pression ne dépend que de z. Montrer que l'on a $\dfrac{d^2v}{dz^2} = -k\sin\alpha$ $(*)$. Exprimer k.

3. Exprimer $P(z)$.

4. Les forces de viscosité à la surface miel-air sont négligées ce qui conduit à la condition $\dfrac{dv}{dz}(z = h) = 0$. Montrer que la vitesse peut se mettre sous la forme $v(z) = \beta z(2h - z)$. Exprimer β en fonction de g, ρ, α et η.

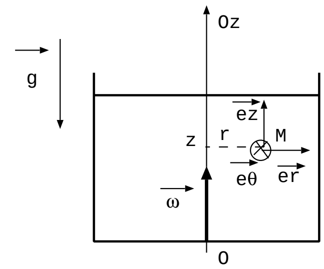
5. Préciser le point où la vitesse est maximale et exprimer v_{max}, la vitesse maximale. AN: $h = 3,0\ mm$, $\alpha = 10^0$, $g = 10\ m.s^{-2}$, $\eta = 10\ Pa.s$ et $\rho = 1,4.10^3\ kg/m^{-3}$.

6. Représenter le profil des vitesses et exprimer le débit volumique D_v. En déduire l'expression de la vitesse moyenne $< v >$ en fonction de v_{max}.

7. Définir le nombre de Reynolds et le calculer. Qualifier la nature de l'écoulement.

III. **Tubes en rotation**

Un récipient cylindrique est rempli d'eau de masse volumique ρ. Ce récipient est mis en rotation autour de son axe de symétrie Oz à la vitesse angulaire constante ω. On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel fixe lié au sol et supposé galiléen. On note $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel mobile lié au cylindre. Le fluide est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

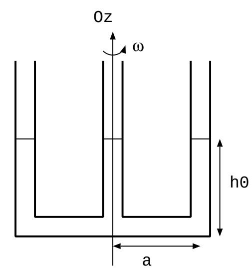


1. On considère une particule fluide M de volume $d\tau$, on repère sa position à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z). Déduire d'un bilan des forces appliquées à cette particule fluide immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les dérivées partielles de la pression par rapport à r, θ et z, puis l'expression de la pression en fonction d'une constante d'intégration que l'on ne cherche pas à calculer. On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

2. Le système est composé de trois tubes de même section remplis d'un liquide de masse volumique ρ sur une hauteur h_0. Les deux tubes sur les côtés sont à la distance a de l'axe de rotation. On note P_0 la pression atmosphérique.

Représenter le système lorsqu'il est en rotation et que le fluide est à l'équilibre dans les tubes (on suppose que la section des tubes est très faible de sorte que les surfaces libres dans les tubes sont horizontales).

Déterminer en fonction de h_0, ω, g et a, les hauteurs d'eau dans les trois tubes.



3. Le tube central a été bouché avant la mise en rotation. Représenter le système lorsqu'il est en rotation et que le fluide est à l'équilibre dans les tubes et exprimer la pression en A juste sous le bouchon.

On observe que pour des vitesses angulaires de rotation supérieure à une valeur limite notée ω_l, le niveau de liquide dans le tube central commence à baisser. Expliquer le phénomène et déterminer ω_l. On note P_s, la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'expérience (la pression de vapeur saturante est la pression d'équilibre liquide-vapeur). La pression de vapeur saturante est inférieure à la pression atmosphérique P_0.